فصل هشتم : ممان اینرسی سطح (Area Moments of Inertia)

سرفصل مطالب فصل : - تعاریف ممان اینرسی سطح حول محورهای مختلف

- قضیه محورهای موازی

- دوران محورها

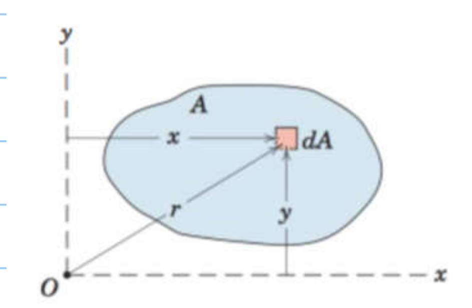
* ممان اینرسی سطح بیانگر نحوه توزیع المان‌های یک سطح حول محورها/نقاط مرجع (= به صورت خاص: مرکز سطح) می‌باشد که فرم ریاضی آن به صورت ∫ (مساحت المان).(فاصله)² می‌باشد و به آن گشتاور دوم سطح (Second Moment of Area) نیز گفته می‌شود.

- بالا بودن مقدار ممان اینرسی سطح، معادل توزیع المان‌های سطح در فاصله دورتری نسبت به محور/نقطه مرجع بوده و این امر در ساخت مربوط به مقاومت سطح سبب مقاومت بیشتر سازه در مقابل ممان‌های خمشی و یا گشتاور خمشی می‌شود.

(مثال: ساخت تیرآهن با مقطع I شکل)

* تعریف : (ممان اینرسی‌های مستطیلی و قطبی)

توجه: همیشه مقدار همواره + هستند.



$I_{xx} = \int y^2 \, dA$

$I_{yy} = \int x^2 \, dA$

متعادل توزیع المان‌های سطح ـ وابسته به محورهای مختصات

$I_{zz} = \int r^2 \, dA$: ممان اینرسی قطبی

* واحد آن‌ها در سیستم SI، m^4 می‌باشد.

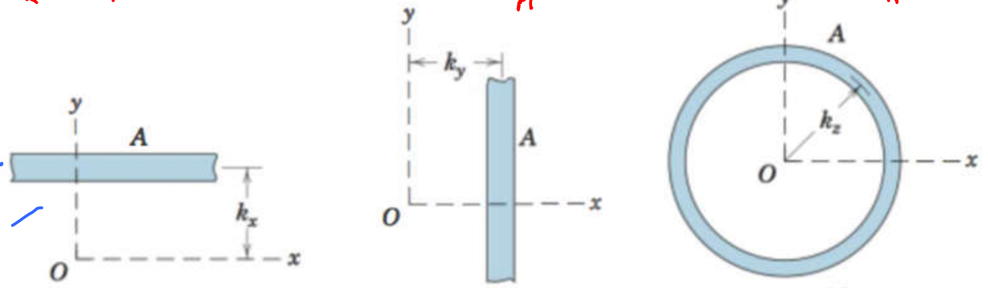
داریم: $r^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow \boxed{I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}}$

* شعاع ژیراسیون (Radius of Gyration) : پارامتری از جنس طول که مجذور آن در مساحت سطح، معادل ممان اینرسی سطح حول آن محور شود :

$$I_{\alpha\alpha} = K_{\alpha\alpha}^2 \cdot A$$

$$k_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} \qquad k_{yy} = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} \qquad k_{zz} = \sqrt{\frac{I_{zz}}{A}}$$

یعنی به عبارتی اگر فرض کنیم که کل سطح مقطع دلخواه A را اگر به شکل یک مستطیل باریک بوده که در فاصله‌ای از محور x قرار داشت همان ممان اینرسی سطح را دارا باشد

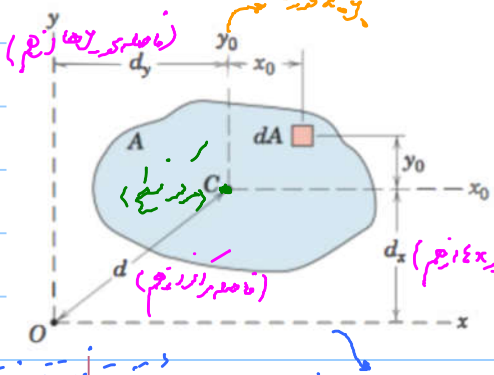


(b) (c) (d)

* قضیه انتقال محورهای موازی :

- فرض کنید ممان‌های اینرسی سطح حول محورهای $x_0 y_0$ گذرنده از مرکز سطح (C) به ما داده شده باشد.

مقدار مربوطه حول محورهای xy موازی با $x_0 y_0$ (با مبدا متفاوت نسبت به $x_0 y_0$) عبارت است از :



$$dI_{xx} = (y_0 + d_x)^2\, dA \Rightarrow I_{xx} = \int (y_0 + d_x)^2\, dA$$

$$\Rightarrow I_{xx} = \underbrace{\int y_0^2\, dA}_{\text{ممان اینرسی سطح حول } x_0} + 2d_x \underbrace{\int y_0\, dA}_{0} + d_x^2 \underbrace{\int dA}_{A}$$

چون مبدا $x_0 y_0$ در مرکز سطح باشد این انتگرال صفر (C) است

$$\Rightarrow \boxed{I_{xx} = \bar{I}_{xx} + A \cdot d_x^2}$$

علامت بار (¯) به معنای ممان اینرسی حول محور گذرنده از مرکز سطح است!

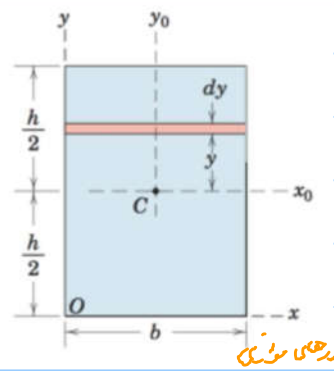
مشابه :

$$\boxed{\begin{aligned} I_{yy} &= \bar{I}_{yy} + A \cdot d_y^2 \\ I_{zz} &= \bar{I}_{zz} + A \cdot d^2 \end{aligned}}$$

توجه: در روابط ارائه شده برای انتقال محورهای موازی، $\bar{I}_{xx}$ (= معادل محورهای گذرنده از مرکز سطح) وجود دارد.

بنابراین درصورتیکه محاسبه ممان اینرسی سطح حول محورهای x_2y_2 (موازی محورهای x_1y_1) از روی مقدار I در دستگاه x_1y_1، حتما بایستی یک بار انتقال، ابتدا مقدار I در دستگاه مرکز سطح را بدست آورده و سپس یکبار انتقال دهیم، مقدار I در دستگاه مختصات هدف (x_2y_2) را محاسبه نمود. (به بیان ساده‌تر: $I_{x_2x_2} \neq I_{x_1x_1} + A\cdot d_x^2$)

مبداها در محلی به جز مرکز سطح



مثال: در مستطیل مقابل، $I_{x_0x_0}$ و I_{xx} را بیابید.

$$I_{x_0x_0} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \underbrace{dA}_{b.dy} \Rightarrow \boxed{I_{x_0x_0} = \frac{1}{12} b h^3}$$

دستگاه که گذرنده از مرکز سطح

قضیه انتقال محورهای موازی

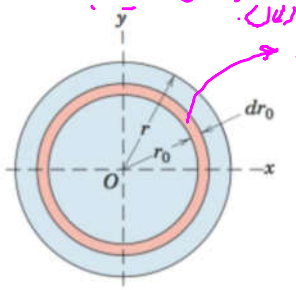
$$I_{xx} = I_{x_0x_0} + A\cdot \underbrace{\left(\frac{h}{2}\right)^2}_{\text{فاصله محورهای } x \text{ و } x_0} \Rightarrow \boxed{I_{xx} = \frac{1}{3} b h^3}$$

بدون بهره‌گیری از قضیه انتقال و با استفاده مستقیم از رابطه $I_{xx}=\int y^2 dA$ در دستگاه xy قابل محاسبه است.

* نشان دهید $I_{y_0y_0} = \frac{1}{12} h b^3$ و $I_{z_0z_0} = \frac{1}{12} bh(b^2+h^2)$ است.

مثال: در مسطح زیر، I_{zz} و I_{xx} را و شعاع ژیراسیون k_{zz} را محاسبه نمایید.

درنظر گرفتن المان به شکل مستطیل به مساحت $dA = (2\pi r_0)dr_0$



$$I_{zz} = \int_0^r r_0^2\, dA = \int_0^r r_0^2 (2\pi r_0\, dr_0) = \frac{1}{2} A r^2 = \frac{1}{2}\pi r^4$$

$$\Rightarrow k_{zz} = \sqrt{\frac{I_{zz}}{A}} \Rightarrow \boxed{k_{zz} = \frac{r}{\sqrt{2}}}$$

از تقارن در هندسه و محورها می‌توان گفت: $I_{xx} = I_{yy}$:

$$I_{xx} + I_{yy} = I_{zz} \Rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2} = \frac{1}{4}\pi r^4$$

همچنین به سادگی می‌توان با در نظر گرفتن سطح $dA = r_0\, d\theta\, dr_0$ و در نظر گرفتن $x = r_0\cos\theta$ و $y = r_0\sin\theta$، مقادیر I_{xx} و I_{yy} را به سادگی محاسبه نمود.

* محاسبه ممان اینرسی در سطوح مرکب (Composite Areas)

- عموماً محل مرکز سطح و مقادیر ممان اینرسی های سطح برای اجسام پرکاربرد در جداول ارائه شده اند که از آن ها می توان در محاسبه ممان اینرسی اجسام مرکب بهره برد؛ بدین ترتیب که برای هر جزء، مقادیر $\bar{I}_{xx}$ و $\bar{I}_{yy}$ (حول مرکز سطح آن جزء)، مساحت جزء (A) و d_x و d_y (فاصله مرکز سطح هر جزء تا محورهای مدنظر ما) محاسبه شده و جدول زیر را تکمیل می نمایید. [توجه: اجزاء حذف شده با مقدار منفی A در فرمول ها وارد می شوند.]

Part	Area, A	d_x	d_y	Ad_x^2	Ad_y^2	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$
Sums	ΣA			ΣAd_x^2	ΣAd_y^2	$\Sigma\bar{I}_x$	$\Sigma\bar{I}_y$

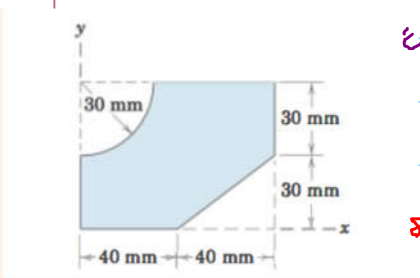
در نهایت داریم:

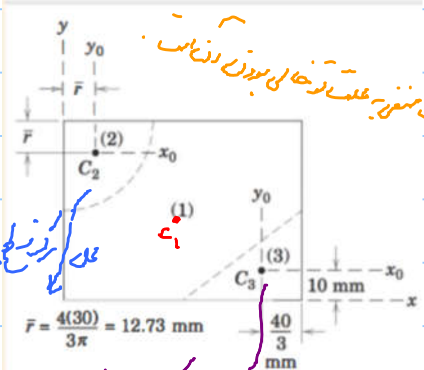
$$I_{xx}\ \text{کل جسم} = \sum \bar{I}_{xx} + \sum A\cdot d_x^2$$

$$I_{yy}\ \text{کل جسم} = \sum \bar{I}_{yy} + \sum A\cdot d_y^2$$

- مثال: در شکل مقابل، I_{xx} را محاسبه نمایید. (ممان اینرسی در موقعیت مرکز سطح مستطیل)

مثلث و ربع دایره را از جداول پیوست کتاب استخراج کنید.





علامت منفی بخاطر حذف بودن از شکل اصلی

محل مرکز سطح ربع دایره

محل مرکز سطح مثلث

80x60 مستطیل بزرگ

مستخرج از جداول

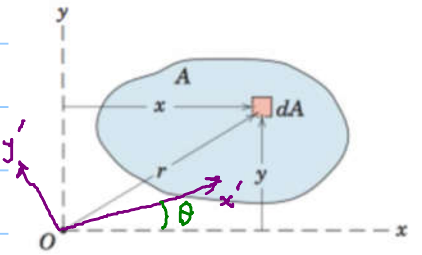
PART	A mm²	d_x mm	d_y mm	Ad_x^2 mm³	Ad_y^2 mm³	$\bar{I}_x$ mm⁴	$\bar{I}_y$ mm⁴
1	80(60)	30	40	4.32(10⁶)	7.68(10⁶)	$\frac{1}{12}(80)(60)^3$	$\frac{1}{12}(60)(80)^3$
2	$-\frac{1}{4}\pi(30)^2$	(60 − 12.73)	12.73	−1.579(10⁶)	−0.1146(10⁶)	$-\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)30^4$	$-\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)30^4$
3	$-\frac{1}{2}(40)(30)$	$\frac{30}{3}$	$\left(80-\frac{40}{3}\right)$	−0.06(10⁶)	−2.67(10⁶)	$-\frac{1}{36}40(30)^3$	$-\frac{1}{36}(30)(40)^3$
TOTALS	3490			2.68(10⁶)	4.90(10⁶)	1.366(10⁶)	2.46(10⁶)

$[I_x = \Sigma\bar{I}_x + \Sigma Ad_x^2]$ $I_x = 1.366(10^6) + 2.68(10^6) = 4.05(10^6)\ \text{mm}^4$ *Ans.* ← کل I_{xx}

$[I_y = \Sigma\bar{I}_y + \Sigma Ad_y^2]$ $I_y = 2.46(10^6) + 4.90(10^6) = 7.36(10^6)\ \text{mm}^4$ *Ans.* ← کل I_{yy}

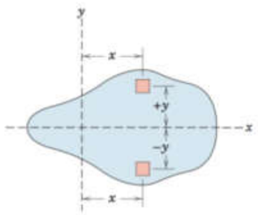
* محاسبه ممان های اینرسی پس از دوران محورها

- فرض کنید ممان های اینرسی حول محور xy را داریم. چطور می توان ممان های اینرسی را در دستگاه مختصات $x'y'$ که با xy هم مرکز بوده و نسبت به آن به اندازه زاویه θ دوران کرده است را با استفاده از مقادیر معلوم محاسبه نمود؟



- ابتدا تعریف می کنیم: حاصلضرب اینرسی (Product of Inertia) : $I_{xy} (= I_{yx}) = \int xy \, dA$

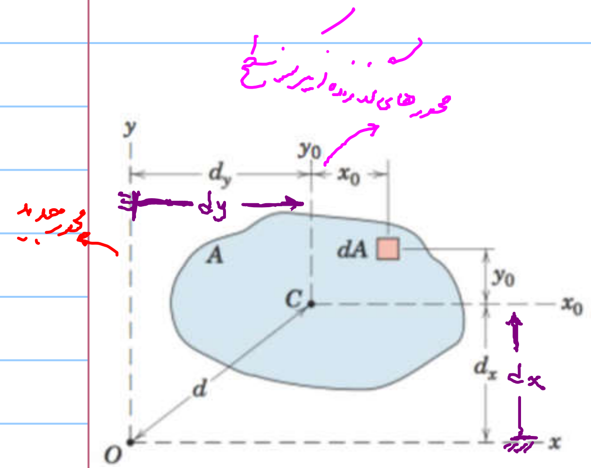
می تواند +، - و حتی صفر (!) باشد.



هر زمانی که محور x یا y، محورهای تقارن شکل باشند، $I_{xy} = 0$ می شود.

- قضیه انتقال محورهای موازی در مورد I_{xy}

با فرض معلوم بودن $\bar{I}_{x_0y_0}$ در دستگاه x_0y_0،



در این شکل d_x و d_y هر دو + می باشند.

$$I_{xy} = \int (x_0 + d_y)(y_0 + d_x) \, dA =$$

$$\int x_0 y_0 \, dA + d_x \int x_0 \, dA + d_y \int y_0 \, dA + d_x d_y \int dA$$

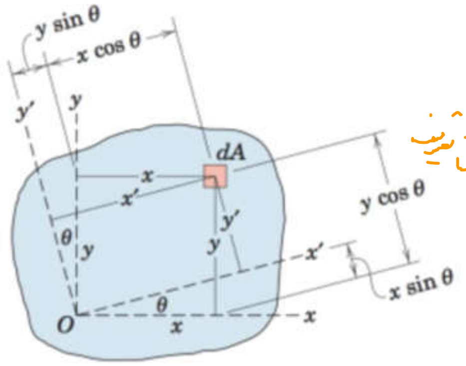
$\bar{I}_{x_0y_0}$ — وقتی C مرکز سطح باشد، حاصلشان صفر است — A

$$\boxed{I_{xy} = \bar{I}_{x_0y_0} + d_x d_y \cdot A}$$

توجه: d_x و d_y، فاصله بین محورهای دستگاه x_0y_0 و xy است که در دستگاه xy (با در نظر گرفتن علامت) در نظر گرفته می شود.

- حال می‌خواهیم به پرسش مطرح شده در ابتدای این بخش پاسخ دهیم: ($I_{x'x'}, I_{y'y'}, I_{x'y'} = ?$ $\Rightarrow$ I_{xx}, I_{yy}, I_{xy} معلوم)

روش اول: (محاسبه از طریق فرمولاسیون دوران)



طبق تعریف

$$I_{x'x'} = I_{x'} = \int y'^2\, dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2\, dA$$

$$I_{y'y'} = I_{y'} = \int x'^2\, dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)^2\, dA$$

$$I_{x'y'} = \int x'y'\, dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)\, dA$$

با بهره گیری از روابط مثلثاتی:

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$,

$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

$$I_{x'x'} = I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'y'} = I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

- به خاطر سپاری این فرمول‌ها به هیچ عنوان کار راحتی نیست، به جای آن می‌توان از روش دایره موهر که در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم، که امکان می‌دهد در محاسبه ممان‌های اینرسی در دستگاه دوران یافته بهره گرفت.

- به نظر شما رابطه بین $I_{x'x'}$ ، $I_{y'y'}$ و $I_{x'y'}$ چطور است؟

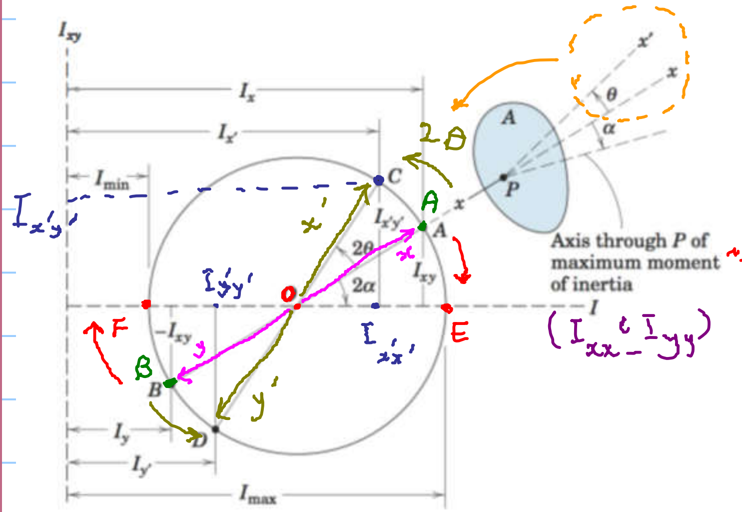
روش دوم: (بهره‌گیری از دایره مور Mohr's Circle of Inertia)

در ابتدا یک محور مختصات کشیده و محور افقی آن را I (I_{xx} و I_{yy}) و محور عمودی آن را I_{xy} می‌نامیم. دو نقطه $A = \begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{xy} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} I_{yy} \\ -I_{xy} \end{bmatrix}$ را مشخص می‌کنیم. حال A را به B وصل کرده تا محور افقی را در نقطه O قطع کند.

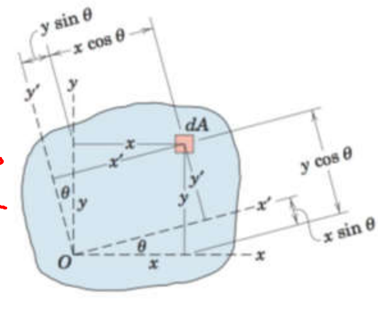
به مرکز O و شعاع OA (= OB) دایره‌ای رسم می‌کنیم. به این دایره، دایره مور گفته می‌شود (که در دیگر درس‌های ترم دوم نظیر تحلیل تیرها، تنش و کرنش و ... نیز کاربرد بسیاری دارد)

- در دایره مور، زاویه‌ها، دو برابر مقدار واقعی‌شان هستند!

- در شکل، پاره‌خط OA نماد محور x و پاره‌خط OB نماد محور y است (در شکل بالا هم چه زاویه‌ای می‌سازند؟)



در دایره مور، زاویه‌ها دو برابر می‌شوند



- حال اگر محور x حول O به اندازه θ درجه دوران کند، ما در دایره مور هم‌جهت با آن (ساعتگرد یا پادساعتگرد)

به اندازه 2θ دوران می‌کنیم تا از نقطه A (معادل محور x) به C (معادل محور x') و از B (معادل محور y) به D (معادل محور y') برسیم. با دانستن مختصات نقاط C و D، ما توانسته‌ایم $I_{x'x'}$، $I_{y'y'}$ و $I_{x'y'}$ را محاسبه کنیم.

(توجه: $C = \begin{bmatrix} I_{x'x'} \\ I_{x'y'} \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} I_{y'y'} \\ -I_{x'y'} \end{bmatrix}$)

- نتیجه مهم: برای هر هندسه دلخواهی، همیشه می‌توان دستگاه مختصات XY را یافت به طوری که $I_{XY}=0$ شود. به این دستگاه مختصات، دستگاه مختصات اصلی و به ممان اینرسی‌های سطح مربوط به این دستگاه (I_{XX} و I_{YY}) ممان اینرسی‌های اصلی سطح گویند.

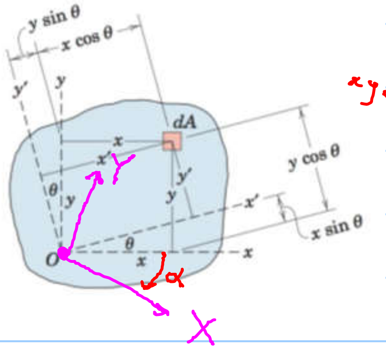
principal axes of inertia

یعنی I_{max} و دیگری I_{min} می‌شود.

- سوال: دستگاه مختصات xy را به چه میزان (α) دوران دهیم تا به دستگاه مختصات اصلی ممان اینرسی سطح برسیم؟

با استفاده از دایره مور، می‌بایست طوری دوران کنیم که نقاط A و B (معادل دستگاه xy)

- نقاط E و F (معادل دستگاه XY) بروند که در شکل با 2α (در این شکل در جهت ساعتگرد) نشان داده شده است. بنابراین دستگاه اصلی XY، هم مرکز با xy بوده و به میزان زاویه α (در این‌جا ساعتگرد) دوران دارد.



می‌توان نشان داد:

زاویه اصلی نسبت به دستگاه xy

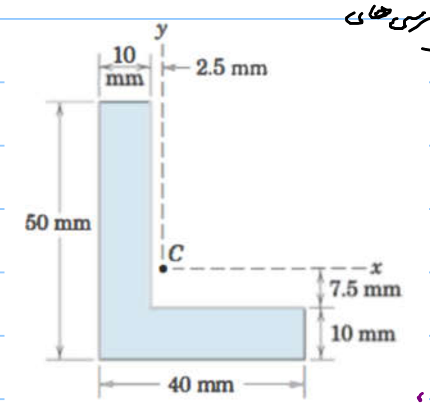
$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

مختصات مرکز O — شعاع دایره مور

I_{XX} (I_{YY} یا) $\leftarrow$ $$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^{\,2}}$$

I_{YY} (I_{XX} یا) $\leftarrow$ $$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^{\,2}}$$

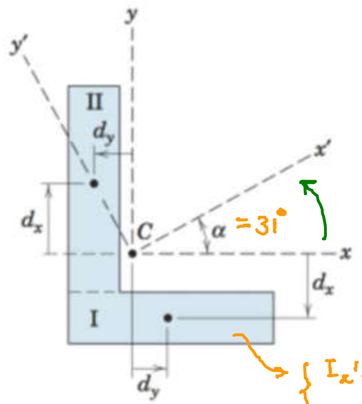
- مثال: در شکل مقابل، جهت محورهای اصلی (XY) و همچنین ممان اینرسی های متناظر در آن دستگاه را بیابید.



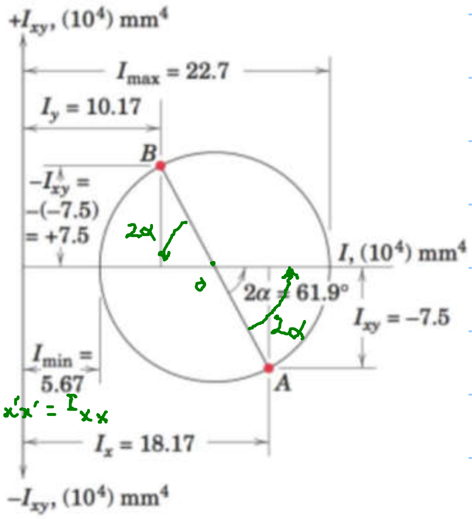
- ابتدا باید موقعیت مرکز سطح (C) در سیستم I_{xx} ، I_{xy} و I_{yy} را با استفاده از روابط احجام ترسیمی و انتقال محورهای موازی بیابید. (مثال رهبر) ، $I_{xx}=18.17\times10^4\ mm^4$

$I_{yy}=10.17\times10^4\ mm^4$ ، $I_{xy}=-7.5\times10^4\ mm^4$ بدست آمد!)

- حال دایره موهر را با داشتن $A=\begin{Bmatrix}I_{xx}\\I_{xy}\end{Bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}I_{yy}\\-I_{xy}\end{bmatrix}$ رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} I_{x'x'}=I_{max}\\ I_{y'y'}=I_{min}\end{cases}$$



پادساعتگرد

$$tg2\alpha=\frac{2(-7.5)}{10.17-18.17}\Rightarrow \alpha=31^\circ$$

$I_{max}=I_{\text{میانگین}}+\text{شعاع}=22.7\times10^4\ mm^4=I_{x'x'}=I_{XX}$

$I_{min}=I_{\text{میانگین}}-\text{شعاع}=5.67\times10^4\ mm^4=I_{y'y'}=I_{YY}$

$I_{x'y'}=0=I_{XY}$