بنام خدا

جلسه هیجدهم، نوزدهم، بیستم و بیست و یکم

استاتیک
مدرس: علیرضا طاهری
دانشکده مهندسی و علم مواد
دانشگاه صنعتی شریف

فصل ششم - اصطکاک و کاربردهای آن

سرفصل مطالب : - انواع اصطکاک

- کاربرد اصطکاک خشک در ماشین‌ها : گوه ها

پیچ های انتقال قدرت

یاتاقان ها

تسمه های انعطاف پذیر

- نیروی وارد شده بین دو سطح در تماس در راستای مماسی (= مخالف در جهت تمایل حرکت نسبی دو سطح) به علت وجود ناهمواری های دو سطح را نیروی اصطکاک (Friction Force) گویند.

- برخلاف تصور عامه، نیروی اصطکاک همواره نیروی مزاحمی نیست و در مواردی به دنبال حداکثر کردن آن نیز می باشیم (ترمز و کلاچ در خودرو، گوه ها و ...)

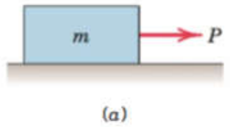
- یک دسته بندی می‌تواند شامل تفکیک نیروهای اصطکاک به دسته های اصطکاک خشک (Dry Friction)، اصطکاک سیال (Fluid Friction) و اصطکاک داخلی (Internal Friction) باشد.

- اصطکاک خشک بین دو سطح در حال تماس (غیر روغن کاری شده) که تمایل به حرکت یا در حال حرکت بر روی یکدیگر هستند رخ می دهد. به این نوع اصطکاک، اصطکاک کولمب (Coulomb Friction) نیز گفته می شود.

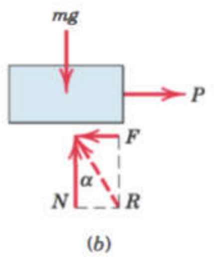
در این فصل فقط اصطکاک خشک و کاربرد آن در ماشین ها را مطالعه می کنیم.

- مکانیزم اصطکاک خشک :

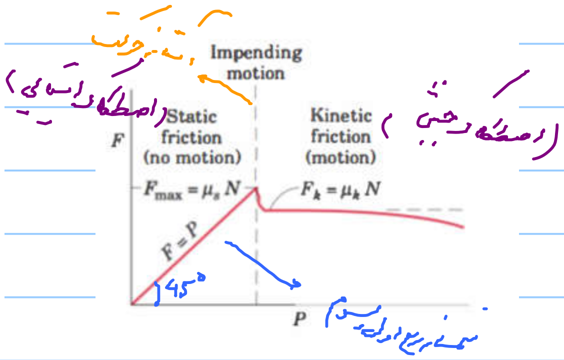
- مطابق شکل، اگر بر جسمی افقی که بر روی سطحی ناهموار قرار دارد، نیروی P را از مقدار صفر افزایش داده، جسم در مقدار مشخص P، شروع به حرکت می‌کند؛ در ادامه نمودار و منحنی نیروی اصطکاک (F) بر حسب P در شکل نشان داده شده است.



(a)



(b)



- فرض می‌شود که نیروی اصطکاک استاتیکی داریم ($F_{s_{max}}$) و اصطکاک جنبشی (F_k) به جنس سطوح تماس و نیروی عمودی دو سطح بستگی داشته و مستقل از مساحت و حجم در حال تماس است.

- اصطکاک استاتیکی می‌تواند هر مقداری بین صفر تا $F_{s_{max}} = \mu_s N$ را داشته باشد؛ بنابراین فقط در آستانه حرکت می‌توان از رابطه حداکثر آن استفاده کرد.

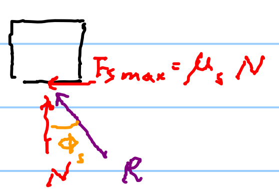
ضریب اصطکاک استاتیکی

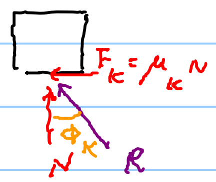
$$0 \le F_s \le F_{s_{max}} = \mu_s N$$

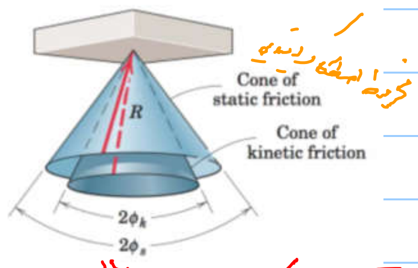
- معمولاً ضریب اصطکاک جنبشی (μ_k) کمتر از ضریب اصطکاک استاتیکی (μ_s) است: $\mu_k < \mu_s$ (ضرایب اصطکاک بدون واحد هستند)

- توجه: ضرایب اصطکاک بین دو سطح تعریف می‌شود و صحبت از ضریب اصطکاک یک سطح بی‌معنی است.

- زوایای اصطکاک :





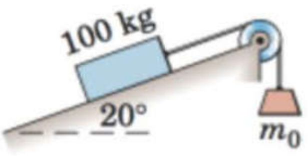


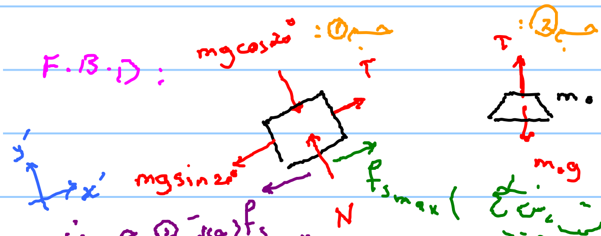
$$\phi_s = tg^{-1}\mu_s \qquad \phi_k = tg^{-1}\mu_k$$

نیروی برآیند اصطکاک استاتیکی فقط اجازه دارد در داخل محدوده (≡ مخروط) قرار گیرد؛ بنابراین در آستانه حرکت، زاویه نیروی اصطکاک استاتیکی با بردار عمود بر سطح، زاویه $\phi_s = tg^{-1}\mu_s$ می‌سازد.

- در مسائل اصطکاک اگر در مورد ساکن یا در حال حرکت بودن جسم اشاره‌ای نشده بود، نیروی اصطکاک ایستایی را $\mu_s N$ یعنی $F_{s_{max}}$ در نظر نگیرید؛ در غیر این صورت F_s را باید به عنوان مجهول در نظر بگیرید؛ اگر $F_s \le F_{s_{max}}$ بود، F_s محاسبه شده صحیح بوده و فرض در تعادل بودن جسم نیز درست می‌باشد. اگر $F > F_{s_{max}}$ به دست آمد دیگر جسم در تعادل ایستایی نبوده و حرکت رخ داده است که در این حالت، اصطکاک از نوع جنبشی ($F_k = \mu_k N$) می‌باشد.

- مثال: در شکل زیر، اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح شیبدار $\mu_s = 0.3$ باشد، محدوده جرم m_0 را طوری بیابید که سیستم در تعادل ایستایی بماند. ($\Leftarrow$ جسم نه به سمت پایین سطح شیبدار بلغزد و نه به بالا حرکت کند)





(حالت ①: $f_{s_{max}}$؛ جسم بخواهد به بالای سطح شیبدار حرکت کند)

$f_{s_{max}}$ (حالت ②: اگر جسم بخواهد به سمت پایین سطح بلغزد)

تعادل جسم 2 : $m_0 g - T = 0 \Rightarrow T = m_0 g = 9.81 m_0$

تعادل جسم 1 : $\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow N - \overset{981}{mg} \cos 20° = 0 \Rightarrow N = 922\ N$

حالت ① : جسم بخواهد به بالا حرکت کند $\rightarrow f_{s_{max}} = \mu_s N$ (نیروی اصطکاک رو به پایین (آستانه حرکت))

$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow T - mg\sin 20 - \underbrace{\mu_s N}_{f_{s_{max}}} = 0 \Rightarrow 9.81\, m_0 - 981 \sin 20° - \underbrace{0.3 \times 922}_{f_{s_{max}} = 277N} = 0$

$\Rightarrow m_0 = 62.4\ kg$ → حداکثر مقدار m_0 برای اینکه جسم به بالا نلغزد و به پایین سطح نلغزد.

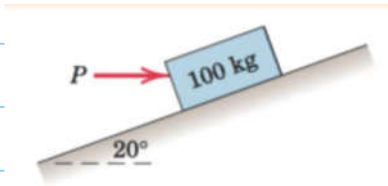
حالت ② : جسم بخواهد به پایین سطح بلغزد $\rightarrow f_{s_{max}} = \mu_s N$ (نیروی اصطکاک رو به بالا (آستانه حرکت))

$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow mg\sin 20° - T - \mu_s N = 0 \Rightarrow m_0 = 6.01\ kg$ ← حداقل m_0 برای اینکه جسم به پایین نلغزد

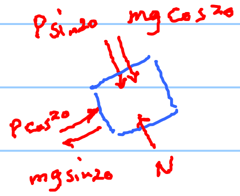
→ محدوده m_0 برای تعادل سیستم : $6.01 \leq m_0 \leq 62.4\ kg$

سؤال : اگر $m_0 = 40\ kg$ باشد، مقدار اصطکاک چقدر و در چه جهتی است؟

– در شکل زیر، اگر ضرایب اصطکاک استاتیکی و جنبشی جسم و سطح شیبدار به ترتیب 0.2 و 0.17 باشد، مقدار نیروی اصطکاک را در حالت‌های الف) $P = 500N$ و ب) $P = 100N$ بیابید.



F.B.D :



الف) $P = 500\,N$: $\begin{cases} P\cos 20^\circ = 469.8\ N \\ mg\sin 20 = 335.5 \end{cases}$ → اصطکاک به سمت پایین سطح است

اگر اصطکاک استاتیکی باشد : $P\cos 20^\circ - mg\sin 20^\circ - f_s = 0 \Rightarrow f_s = 134.3\ N^{*}$ حال باید چک کنیم که سطح قابلیت برگرداندن این مقدار نیروی اصطکاک را دارد یا خیر

$N - (P\sin 20^\circ + mg\cos 20^\circ) = 0 \Rightarrow N = 1093\,N$

$\rightarrow F_{s_{max}} = \mu N = 0.2 \times 1093 \Rightarrow F_{s_{max}} = 219\ N$ **

*, ** → چون $\underbrace{f_s}_{\text{محاسبه شده}} < F_{s_{max}}$ → اصطکاک از نوع استاتیک است، $f_s = 134.3\ N$ (به سمت پایین سطح شیبدار)

ب) $P = 100\,N$: $\begin{cases} P\cos 20^\circ = 94.0\,N \\ mg\sin 20^\circ = 335.5\ N \end{cases}$ → اصطکاک به سمت بالای سطح شیبدار است

اگر اصطکاک استاتیکی باشد : $mg\sin 20^\circ - P\cos 20^\circ - f_s = 0 \Rightarrow f_s = 242\ N$ $\left\{ \cancel{f_s > F_{s_{max}}} \right.$

$N - (P\sin 20^\circ + mg\cos 20^\circ) = 0 \Rightarrow N = 956\ N \Rightarrow F_{s_{max}} = 191.2$

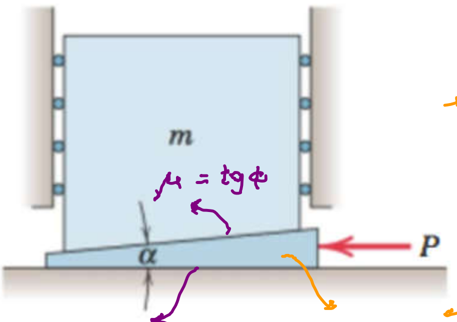
⇒ بنابراین اصطکاک از نوع جنبشی است و جسم در حال سُر خوردن است : $f_k = \mu_k N = 0.17 \times 956 \Rightarrow \boxed{f_k = 162.5N}$ به سمت بالای سطح

۲- کاربرد اصطکاک در ماشین ها:

الف) گوه ها (Wedges)

- گوه ها ماشین های ساده ای هستند که برای وارد کردن نیروهای بزرگ به اجسام به واسطه نیروی کوچک تر و یا تنظیم موقعیت یک جسم سنگین مورد استفاده قرار می گیرند. اساس کار گوه ها، نیروهای اصطکاک است.

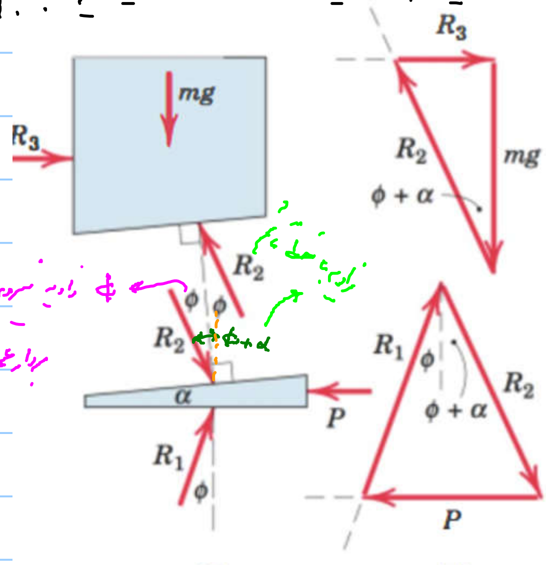
- در شکل زیر، به وسیله نیروی افقی P، تا جسم مانع را به جرم m نیروی زیادی وارد کنیم و یا موقعیت آن را به صورت جزئی تنظیم کنیم. اگر مجموعه در تعادل باشد:



(a)

زاویه گوه α

در راستای x



(b) (c)

زاویه نیروی اصطکاک که φ را با عمود بر سطح می سازد

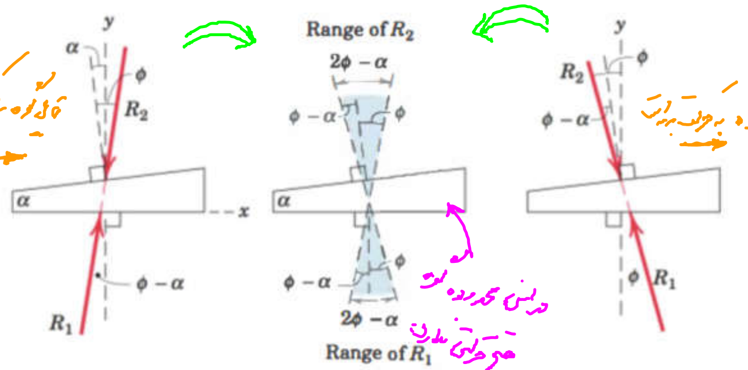
زاویه بین خط عمود و R_2: φ+α

$$\begin{cases} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{P} = \vec{0} & \text{تعادل گوه:} \\ \vec{R}_2 + \vec{R}_3 + \vec{W} = \vec{0} & \text{تعادل جرم m:} \end{cases}$$

- حال فرض کنید نیروی P را حذف کنیم. برای گوه چه اتفاقی می افتد؟ در حالت قابل وقوع است: یا گوه متمایل است به حرکت خود برگشته و از زیر بار خارج شود (تمایل به حرکت به سمت راست/بیرون) و یا اینکه به واسطه نیروهای اصطکاک گیر کند (!)

(تمایز در حالت a, c)

سرهای خودنگهدارنده (حالت خودقفلی، self-locking) ❗



(a) Slipping impending at upper surface (b) Range of $R_1 = R_2$ for no slip (c) Slipping impending at lower surface

تمایل گوه به حرکت به راست

تمایل گوه به حرکت به راست

در این محدوده گوه هیچ حرکتی ندارد

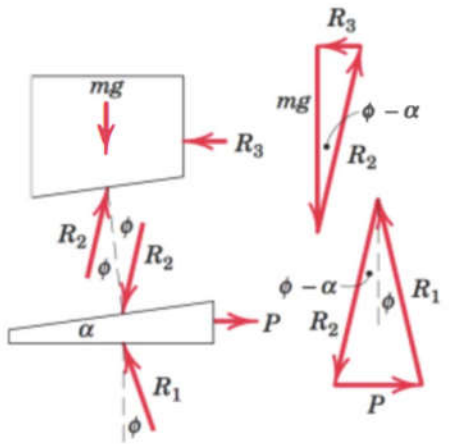
لغزش در سطح بالایی: اصطکاک در سطح بالا به حداکثر مقدار خود رسیده است

لغزش در سطح زمین

بسیاری از ماشین ها بر این پدیده مبتنی است.

- اگر $\alpha < 2\phi$، پدیده لغزش در دو سطح بالا

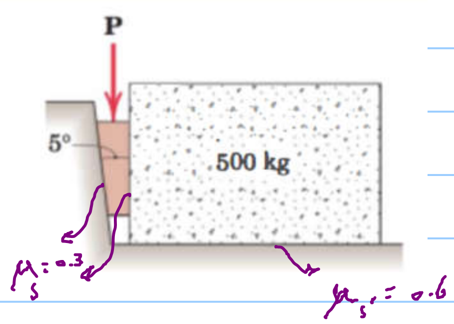
و پایین می تواند به صورت همزمان رخ دهد و با خودقفلی مواجهیم.



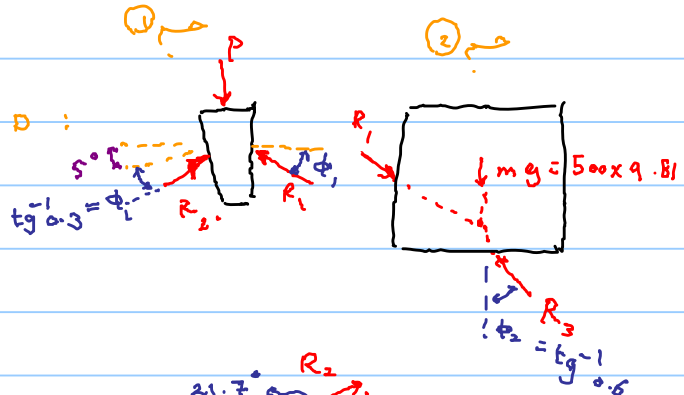
Forces to lower load

- اگر گوه‌ای خودقفل باشد، برای خارج شدن آن از زیر بار (حرکت به سمت راست شکل)
باید نیروی P را به سمت چپ به گوه وارد نمود. در این حالت می‌توان از روابط
تعادل پیکره آزاد و چندضلعی موردنظر را یافت. (به عنوان مثال حداقل P جهت
اینکه گوه در آستانه لغزش به بیرون از پایین بلوک بار قرار گیرد)

- مثال: موقعیت افقی بلوک 500 کیلوگرمی بتنی شکل زیر با گوه $5°$ تحت نیروی P تنظیم شده است. اگر ضرایب اصطکاک گوه با سطوح
0.3 و ضریب اصطکاک بلوک با زمین 0.6 باشد، حداقل نیروی P موجب حرکت بلوک را محاسبه نمایید.

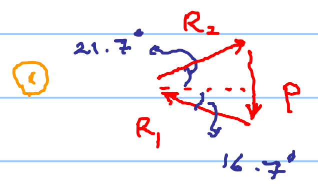


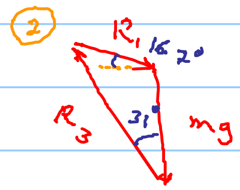
F.B.D :



$$\phi_1 = tg^{-1} 0.3 \Rightarrow \phi_1 = 16.7°$$

$$\phi_2 = tg^{-1} 0.6 \Rightarrow \phi_2 = 31°$$





② تعادل جسم

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_3 - mg\,\hat{j} = \vec{0}$$

$$500 \times 9.81 \sin 31° - R_1 \cos(16.7° + 31°) = 0$$

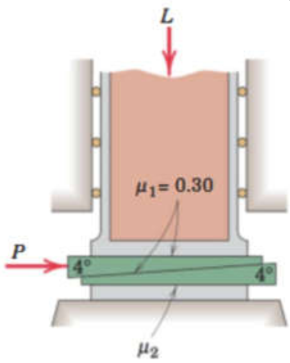
$$\Rightarrow R_1 = 3750\ N$$

① تعادل جسم :

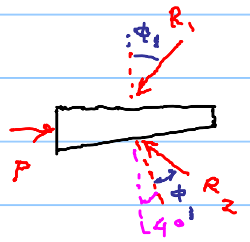
$$3750 \cos(90 - (2\phi_1 + 5°)) - P \cos(\phi_1 + 5°) = 0$$

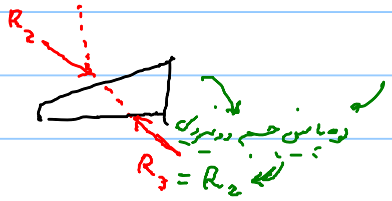
$$\Rightarrow \boxed{P = 2500\ N}$$

مثال: مطابق با شکل، از دو گوه $4°$ جهت تنظیم موقعیت عمودی بار L استفاده می‌شود. حداقل ضریب اصطکاک μ_2 بین زمین و گوه پایینی چقدر باشد تا در اثر اعمال نیروی افقی P بر گوه بالایی، بار به سمت بالا حرکت کند؟



$\Longrightarrow$ F.B.D :





$$\phi_2 = \phi_1 + 4 \rightarrow \phi_2 = 20.7°$$

$$\rightarrow \mu_2 = tg\ 20.7° \rightarrow \mu_{2\,min} = 0.378$$

ب) پیچ‌ها (Screws)

- از پیچ‌ها جهت بستن / سفت کردن و یا انتقال قدرت در جاهایی استفاده می‌شود.

- پیچ‌های دنده مربعی (square thread) بیشترین کاربرد را در انواع پیچ جهت انتقال قدرت و جابجایی بار می‌باشند.

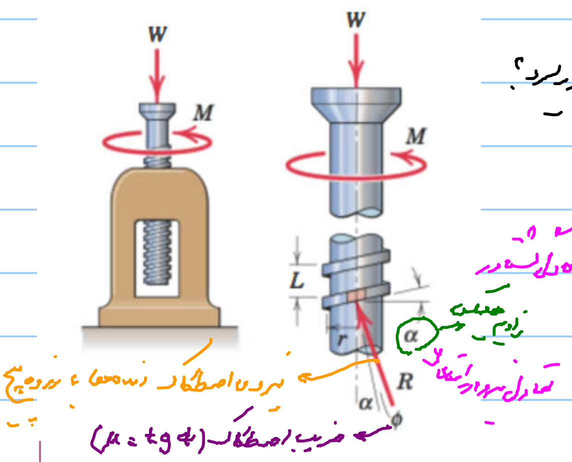
- گام پیچ (Lead): میزان پیشروی پیچ به ازای یک دور (2π رادیان) چرخش پیچ

- زاویه حلزونی پیچ (helix angle): $\alpha = tg^{-1} \frac{L}{2\pi r}$

گام پیچ

شعاع متوسط پیچ

- حداقل چه میزان گشتاور لازم است تا بار W بالا برود / در دستگاه جک به بالا حرکت کند؟



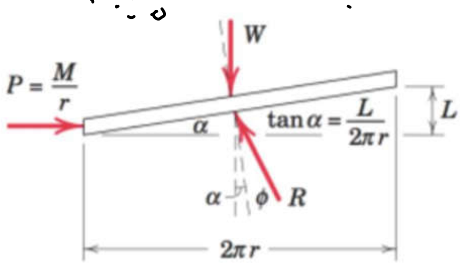
(حرکت بار در خلاف جهت نیروی بار)

گشتاور: $M = (r \sin(\phi+\alpha))(\Sigma R)$

$\Rightarrow \boxed{M = W.r.tg(\phi+\alpha)}$

تعادل نیروهای عمودی: $W = (\cos(\phi+\alpha))(\Sigma R)$

- شکل زیر، معادل شکل صفحه قبل است بدین صورت که به اندازه یک گام، رشته‌ها باز شده‌اند و همچنین به جای گشتاور M ،



(a) To raise load

نیروی معادل $P = \frac{M}{r}$ در محل نشان داده شده، قرار داده شده است.

با بررسی تعادل رابطه صفحه قبل: $M = W r \, tg(\phi + \alpha)$

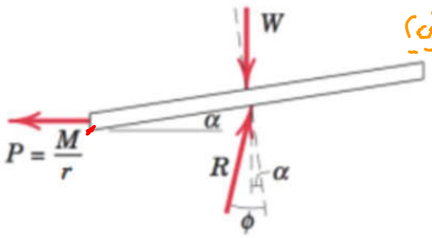
- حال اگر گشتاور M برداشته شود، برای پیچ چه اتفاقی می‌افتد؟ یا سر جای خود باقی می‌ماند (اگر $\alpha < \phi$) که به

این حالت خود قفل (self-locking) گویند و یا در جهت بار (در اینجا به سمت پایین) جابجا می‌شود که در این حالت پیچ خود قفل نشده است!

$\alpha > \phi$ ⇒ نمی‌تواند به صورت تنها R باشد.

چرا در $\alpha > \phi$ خود قفل نمی‌ماند؟

- فرض کنید پیچ خود قفل است. معادل گشتاور M' برای آنکه پیچ را در جهت بار (به سمت پایین) به حرکت در آوریم چقدر است؟



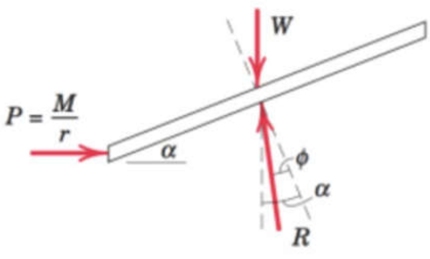
(b) To lower load ($\alpha < \phi$)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow W = R\cos(\phi - \alpha)$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow M' = R\sin(\phi - \alpha) \cdot r$$

$$\Rightarrow M' = Wr \cdot tg(\phi - \alpha)$$

- فرض کنید که پیچ خود قفل نباشد (یعنی $\alpha > \phi$) با بررسی پیچ متعادل است تا به پایین رود. معادل گشتاور M'' در جهت خلاف است، برای آنکه پیچ پایین نرود چقدر است؟



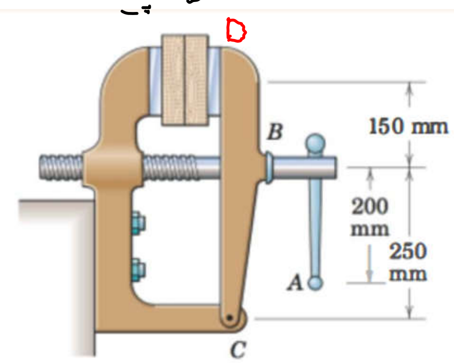
(c) To lower load ($\alpha > \phi$)

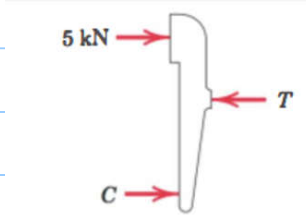
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow W = R\cos(\alpha - \phi)$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow M'' = (R\sin(\alpha - \phi))\, r$$

$$\Rightarrow M'' = W \cdot r \, tg(\alpha - \phi)$$

- در گیره نشان داده شده، قطر متوسط پیچ تک راهه مربعی 25mm و طول گام 5mm است. ضریب اصطکاک بین پیچ و رزوه‌ها 0.2 است. نیروی 300N در نقطه A به دسته وارد می‌شود، به طوری که نیروی فشاری 5kN در نقطه D (بین دو فک) ایجاد کند. الف) گشتاور اصطکاکی M_B که در B به وجود می‌آید را محاسبه نمایید. ب) جهت باز کردن گیره، حداقل نیروی Q که باید به دسته وارد شود را محاسبه کنید (فرض کنید که گشتاور اصطکاکی M_B ثابت است.)

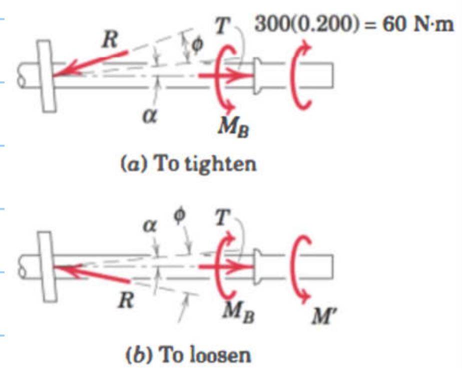




$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 5 \times 400 = T \times 250 \Rightarrow T = 8\ kN$$

$$\alpha = tg^{-1}\frac{L}{2\pi r} = tg^{-1}\frac{5}{2\pi(12.5)} \Rightarrow \alpha = 3.64^\circ$$

$$\phi = tg^{-1}\mu = tg^{-1}0.2 \Rightarrow \phi = 11.31^\circ$$



گشتاور بستن

الف) $300 \times 0.2 - M_B = T \cdot r\, tg(\phi + \alpha)$

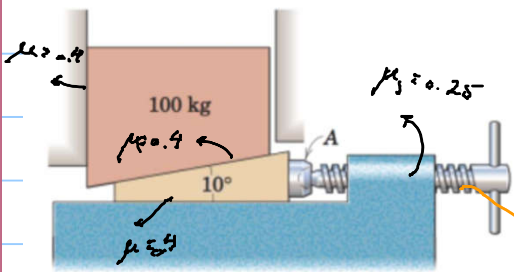
$$\Rightarrow M_B = 33.3\ N.m$$

ب) $M' - \underbrace{33.3}_{M_B} = T \cdot r\, tg(\phi - \alpha)$

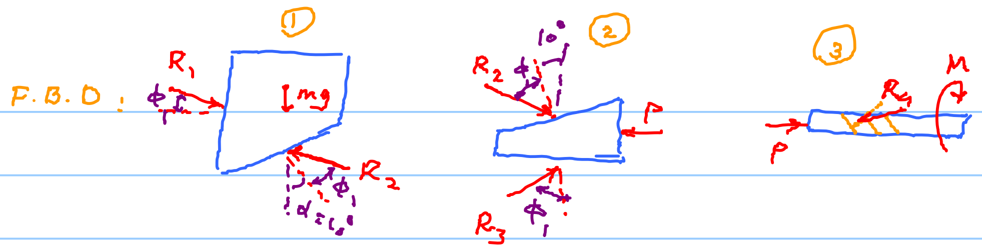
$$\Rightarrow M' = 46.8\ N.m \Rightarrow Q = \frac{M'}{d} = \frac{46.8}{0.2}$$

$$\Rightarrow Q = 234\ N$$

- موقعیت عمودی بلوک 100 کیلوگرمی توسط گوه‌ای که با مکانیزم پیچ انتقال قدرت هدایت می‌شود، قابل تنظیم است. مطلوبست محاسبه حداقل گشتاور مورد نیاز به دسته پیچ جهت بالا بردن بار.



$d = 30\ mm$, $L = 10\ mm$



$\phi_1 = tg^{-1} 0.4 \Rightarrow \phi_1 = 21.8°$

① جسم : $\sum F_y = 0 \Rightarrow 100 \times 9.81 \cos 21.8° = R_2 \cos 53.6° \Rightarrow R_2 = 1535 N$

② جسم : $\sum F_x = 0 \Rightarrow R_2 \cos 36.4° = P \cos 21.8° \Rightarrow P = 1331 \ N$

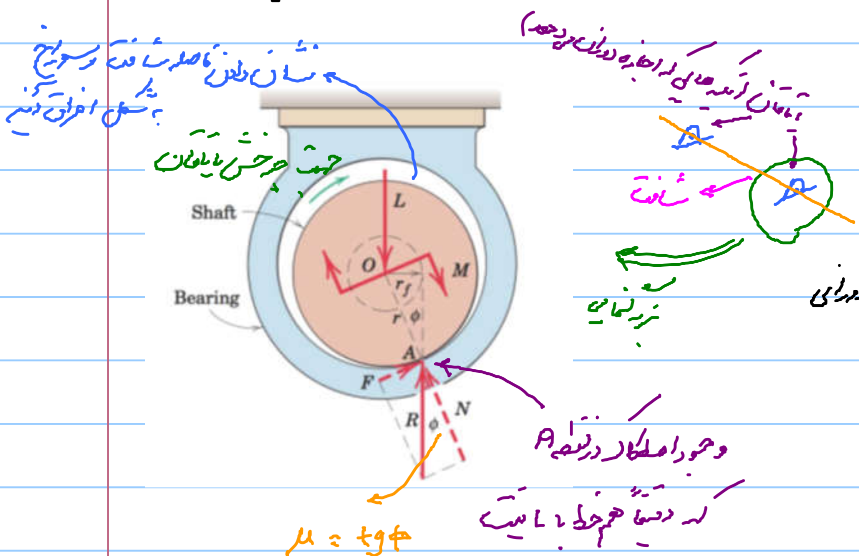
③ جسم : $M = P . r . tg(\phi_2 + \alpha) \Rightarrow \boxed{M = 7.3 \ N.m}$

$\phi_2 = tg^{-1} 0.25 \Rightarrow \phi_2 = 14.04°$

$\alpha = tg^{-1} \dfrac{10}{2\pi \times 15} \Rightarrow \alpha = 6.06°$

ج) یاتاقان ژورنال (Journal Bearing) : تکیه‌گاهی است که وظیفه اصلی‌اش وارد کردن نیروهای شعاعی (جانبی) جهت نگهداری شافت‌های دوار است.

- در یاتاقان‌های روغن‌کاری نشده و یا تا حدودی روغن‌کاری شده، فرض اصطکاک خشک در محاسبات ریاضی معقول است.



شرط تعادل در راستای قائم : $L = R$

شرط عدم وجود شتاب دورانی : $\sum M_A = 0$

$\Rightarrow M = R . r_f \Rightarrow \boxed{M = L r \sin\phi}$

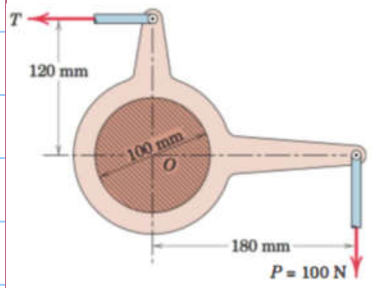
برای حل تمرین‌های خارج

$\xrightarrow[tg\phi = \mu]{if \ \phi < 6° \Rightarrow \sin\phi = \phi = tg\phi} M = L r \mu$

نیروی محل نقطه A را در سوالات به ما نمی‌دهند

که با اعمال شرایط تعادل، آن را می‌یابیم

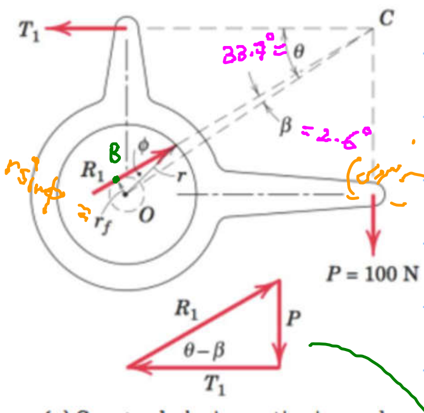
- مثال : دسته محور شکل زیر بر روی شافتی به قطر 100 mm ثابت شده و اجازه دوران ندارد. جهت تعادل لنگ



سیستم تحت نیروی $P = 100N$ ، نیروی افقی T به آن وارد میشود. اگر ضریب اصطکاک بین شافت و دسته محور $\mu = 0.2$ باشد، حداقل و حداکثر نیروی T برای حفظ حالت سکون سیستم را بیابید.

$$\phi = tg^{-1}\mu = tg^{-1} 0.2 \Rightarrow \phi = 11.31^\circ$$

- بیشترین و کمترین مقدار T زمانی در آستانه حرکت بودن سیستم رخ می‌دهد.



(a) Counterclockwise motion impends

(b) Clockwise motion impends

اصطکاک دستهای که لازم است و با بردار عمود بر سطح شافت، زاویه ϕ می‌سازد.

- جهت تعادل سیستم باید سه نیروی P، T و R در نقطه C متقارب باشند (= هم‌رس نیرویی)

$$r_f = r\sin\phi = 50 \sin 11.31^\circ \Rightarrow r_f = 9.81\ mm$$

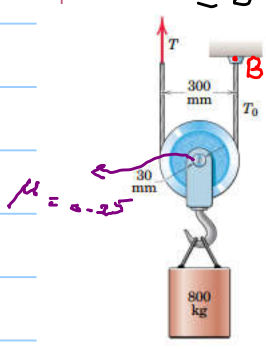
$$\theta = tg^{-1}\frac{120}{180} = 33.7^\circ \ , \ \beta = \sin^{-1}\frac{r_f}{OC} = \sin^{-1}\frac{9.81}{\sqrt{120^2+180^2}} = 2.6^\circ$$

OCB' ، OCB قائم الزاویه

الف) آستانه چرخش پادساعتگرد : $T_{max} = P\cot(\theta-\beta) \Rightarrow T_{max} = 165.8N$

ب) آستانه چرخش ساعتگرد : $T_{min} = P\cot(\theta+\beta) \Rightarrow T_{min} = 136.2N$

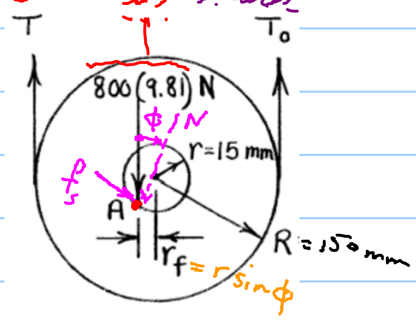
- مثال : مقدار کشش کابل در T را بیابید به گونه‌ای که وزنه 800kg در آستانه حرکت به بالا قرار گیرد. همچنین مقدار کشش



Problem 6/80

کابل در نقطه ثابت B را نیز بیابید. قطر یاتاقان 30mm و ضریب اصطکاک بین محور و یاتاقان $\mu = 0.25$ می‌باشد. از جرم کابل و قرقره صرف نظر کنید. (= توجه داشته باشید که به علت اصطکاک بین کابل و قرقره، T و T_0 با هم برابر نمی‌باشند.)

نیروی وزن بار = برآیند اصطکاک و نیروی عمودی یعنی نیروی عکس‌العمل در شفت



$\phi = tg^{-1}\mu = tg^{-1}0.25 \Rightarrow \phi = 14.04°$

$r_f = r\sin\phi = 15\sin 14.04° \Rightarrow r_f = 3.64\ mm$

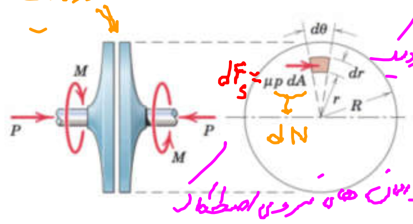
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow T + T_0 - 800\times 9.81 = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow -T(150-3.64) + T_0(150+3.64) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow T = 4020\ N \quad , \quad T_0 = 3830\ N$

۳) Thrust Bearing ، اصطکاک بین دیسک‌ها

- اصطکاک بین صفحات دایره‌ای در ترمزهای دیسکی و یا صفحات کلاچ به سبب نیروی فشاری با توزیع گسترده پدید می‌آید.

دو دیسک تحت فشار (یعنی وارده)
(نیروی محوری)



نیروی فشاری دو دیسک : $P = \int p(r,\theta)\,dA = \int p(r,\theta)\,(r\,d\theta\,dr)$

گشتاور ناشی از تنش‌های نیروی اصطکاک : $M = \int r\cdot dF_s = \int r\mu\, dN = \int r\mu\, p(r,\theta)\,dA$

$$\Rightarrow \left\{ M = \int \mu p r\, dA \right.$$

- بیشترین گشتاوری که چنین کلاچی می‌تواند منتقل کند برابر است با گشتاور اصطکاکی بیشینه در دیسک‌ها به طوری که دیسک را در آستانه لغزش بر روی دیسک دیگر قرار دهد.

حالت‌های خاص :

۱) فرض کنید فشار p در تمام نقاط بین دو دیسک یکنواخت باشد.

$\Rightarrow p = \dfrac{P}{\pi R^2} \ , \ M = \int \mu p r\, dA = \mu p \int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^2\, dr\, d\theta \Rightarrow M = \dfrac{2}{3}\mu P R$ ⇒ معادل وارد شدن P در فاصله‌ی $\frac{2}{3}R$

۲) اگر فشار ثابت بوده لذا دیسک ها دارای توخالی با شعاع های داخلی و خارجی R_i و R_o باشند:

$$\Rightarrow p=\frac{P}{\pi(R_o^2-R_i^2)} \quad , \quad M=\mu p\int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_o} r^2\,dr\,d\theta \Rightarrow M=\frac{2}{3}\mu P\frac{R_o^3-R_i^3}{R_o^2-R_i^2}$$

۳) اگر (به جای p) ، $rp=$ ثابت $=K$ باشد:

$$P=\int p\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \underbrace{pr}_{K}\,dr\,d\theta \Rightarrow P=2\pi KR$$

$$M=\int \mu \underbrace{pr}_{K}\,dA \Rightarrow M=\mu K\pi R^2 \Rightarrow M=\frac{1}{2}\mu PR$$ ⇐ معادل وارد شدن P در فاصله $\frac{1}{2}R$

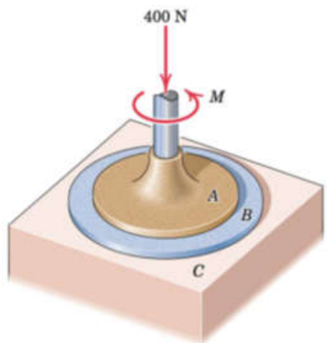
۴) اگر $rp=K=$ ثابت و دیسک ها دارای توخالی با شعاع های داخلی و خارجی R_i و R_o باشند:

$$P=\int p\,dA=2\pi K(R_o-R_i)$$

$$M=\int \mu pr\,dA=\frac{1}{2}\mu P(R_o+R_i)$$

* بسته به تغییرات مقدار p نسبت به شعاع (دو حالت اخیر)، روابط بیان حداکثر گشتاور قابل انتقال دیسک ها قابل محاسبه است.

مثال: مطابق شکل، دیسک دارای A بر روی دیسک B تحت نیروی فشاری $400\ N$ قرار دارد. شعاع دیسک های A و B به ترتیب 225 و 300 میلیمتر می باشند. اگر ضریب اصطکاک بین A و B، $\mu=0.4$ باشد، با فرض توزیع فشار یکنواخت بین A و B، گشتاور M را بیابید به طوری که A در آستانه لغزش بر B قرار گیرد. همچنین ضریب اصطکاک بین سطوح B و C جهت عدم لغزش سطح B بر C را بیابید.



دیسک A و B : $M = \frac{2}{3}\mu P R \Rightarrow M = \frac{2}{3} \times 0.4 \times 400 \times \frac{0.225}{2} \rightarrow \underline{M = 12\ N.m}$

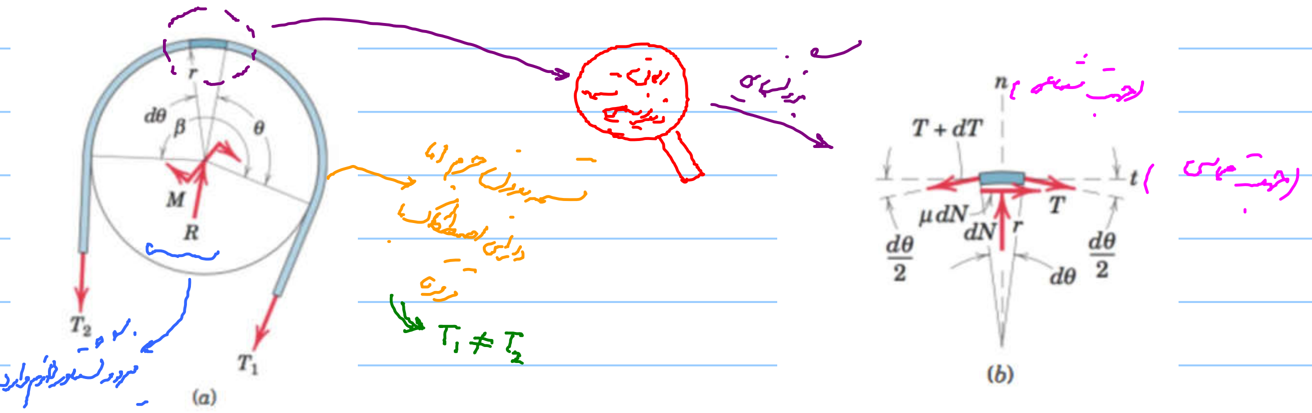
شعاع مشترک A و B

دیسک های B و C : $M = \frac{2}{3}\mu' P R' \Rightarrow 12 = \frac{2}{3}\mu' \cdot 400 \times \frac{0.300}{2} \Rightarrow \underline{\mu' = 0.300}$

شعاع مشترک B و C

ث) تسمه‌های انعطاف پذیر (Flexible Belts)

- توجه به آستانه لغزش در طراحی کابل‌های انعطاف پذیر، تسمه‌ها و تسمه‌های نگهدارنده مسئله بسیار مهمی است.



$$\Sigma F_t = 0 \Rightarrow T\cos\frac{d\theta}{2} + \mu\, dN = (T + dT)\cos\frac{d\theta}{2} \xrightarrow{\cos\frac{\theta}{2} \simeq 1} \mu\, dN = dT \quad *$$

$$\Sigma F_n = 0 \Rightarrow dN = (T + dT)\sin\frac{\theta}{2} + T\sin\frac{\theta}{2} \xrightarrow{\sin\frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta}{2}} dN = T\, d\theta \quad **$$

$$* , ** \longrightarrow \left\{ \frac{dT}{T} = \mu\, d\theta \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\beta \mu\, d\theta \Rightarrow \ln\frac{T_2}{T_1} = \mu\beta \right.$$

$$\rightarrow \boxed{T_2 = T_1 e^{\mu\beta}}$$

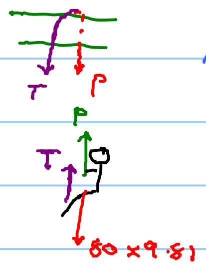
نکته جالب: عبارت فوق مستقل از شعاع درگیری می‌باشد!

(نمایی)

به دلیل وجود رابطه نمایی فوق، در بالابرها، کشش تسمه به صورت نمایی افزایش می‌یابد.

* توجه: β می‌تواند مقادیر بیشتر از 2π را نیز به خود اختصاص دهد.

مثال ـ در شکل زیر، اگر ضریب اصطکاک بین طناب و شاخه درخت 0.6 باشد، شخص 80 کیلوگرمی با چه نیرویی را به طناب وارد کند تا در آستانه حرکت به پایین قرار گیرد؟ (= به آرامی رو به پایین حرکت کند.)



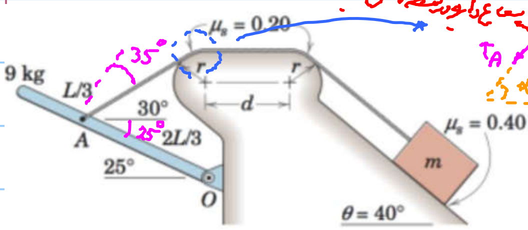
$\beta = \pi \ (rad)$ $\quad T > P \ : \ T = P e^{\mu \beta}$

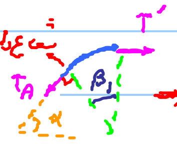
$T + P = mg \Rightarrow P e^{\mu \beta} + P = mg$

$\Rightarrow P(1 + e^{0.6\pi}) = 80 \times 9.81 \Rightarrow \{ P = 103.5 \ N$

ـ مثال: با توجه به شکل زیر، حدود m را بیابید به طوری که سیستم در تعادل استاتیکی باشد. ضریب اصطکاک طناب با سطح $\mu_1 = 0.2$ و ضریب اصطکاک جرم m با سطح شیبدار $\mu_2 = 0.4$ می‌باشد. (از اصطکاک در لولای O صرف نظر شود)

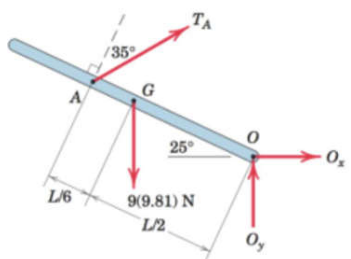
شعاع دایره بر خط مماس عمود است.





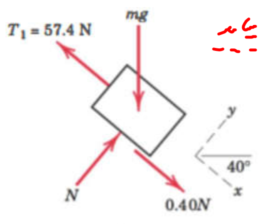
$\Rightarrow \beta_1 = \alpha$

F.B.D :



$\sum M_O = 0 \Rightarrow -T_A \left(\frac{2L}{3}\cos 35^\circ\right) + 9 \times 9.81 \left(\frac{L}{2}\cos 25^\circ\right) = 0$

$\Rightarrow T_A = 73.3 \ N$

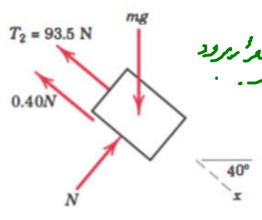


Case I

جسم تمایل دارد به سمت بالای سطح شیبدار برود $\Rightarrow T_A > T_1 \ : \ T_A = T_1 e^{\mu_1 \beta}$ $\quad \beta = (30^\circ + 40^\circ)\frac{\pi}{180^\circ}$

$\Rightarrow 73.3 = T_1 \cdot e^{0.2 \, (30+40) \cdot \frac{\pi}{180}} \Rightarrow T_1 = 57.4 \ N$

$\Rightarrow T_1 - \mu N - mg \sin 40^\circ = 0 \Rightarrow \{ m = 6.16 \ kg$ $\quad N = mg\cos 40^\circ$



Case II

جسم تمایل دارد به سمت پایین سطح شیبدار برود : $T_2 > T_A \ : \ T_2 = T_A e^{\mu_1 \beta}$

$\Rightarrow T_2 = 73.3 \, e^{0.2 (30+40) \frac{\pi}{180}} \Rightarrow T_2 = 93.5 \ N$

$$\Rightarrow \quad T_2 + \mu_2 \underbrace{N}_{mg\cos 20} = mg\sin 20 \Rightarrow \underbrace{\{\, m = 28.3\ kg}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\{\, 6.16\ kg \leq m \leq 28.3\ kg}$$

⊕ توجه داشته باشید که به علت صرف نظر کردن از جرم طناب، نقاط تماس منحنی در تماس با سطح بر کشش طناب اثری نمی‌گذارند

طول l_1 و l_2 در حل این مسئله نقشی ندارد. به عبارتی زاویه‌ی طناب‌ها در تماس با سطح $\beta = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$ می‌باشد.

فصل هفتم - کار مجازی (Virtual Work)

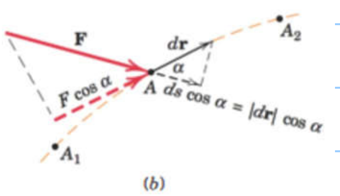
سرفصل مطالب فصل: - تعریف کار

- حل مسائل تعادل از روش کار مجازی

- تاکنون جهت حل مسائل استاتیک و تعیین مجهولات (که عمدتاً از جنس نیرو بودند)، از نوشتن معادلات تعادل نیوتن/اویلر استفاده می‌کردیم. اگرچه این روش مستقیم‌ترین رویکردی را به کار می‌دهد، اما در اکثر مواقع ما مجبوریم که نیروهای تکیه‌گاهی و یا نیروی در اثر اتصال را محاسبه نماییم. در این فصل با معرفی روش کار مجازی، که در حالت عمومی تر برای سیستم‌های ایده‌آل (با فرض عدم وجود نیروی اصطکاک در اتصالات و عدم ذخیره انرژی الاستیک اعضای تک قسمتی) متشکل از دو یا چند جسم صلب متصل به هم، بدون نیاز به جدا کردن اعضای متصل و همچنین بدون نیاز به محاسبه نیروهای تکیه‌گاهی، رابطه بین نیروهای فعال را مستقیماً محاسبه نماییم. این روش خصوصاً در تعیین و شناسایی موقعیت‌های تعادل یک سیستم بسیار کاراست.

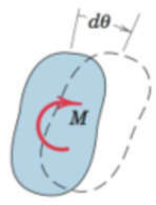
- کار نیرو یا گشتاور:

نیرو:



(b)

گشتاور:



(a)

$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F\cos\alpha)ds = F(ds\cos\alpha)$

ضرب داخلی

کار انجام شده به واسطه نیروی $\vec{F}$ و جابجایی $d\vec{r}$

(از جنس انرژی - اسکالر)

$dU = M\,d\theta$

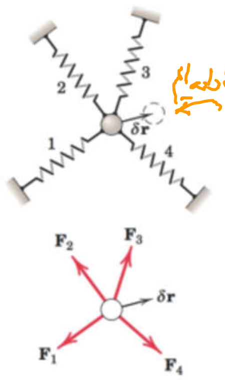
کار انجام شده به واسطه گشتاور M و جابجایی زاویه‌ای $d\theta$

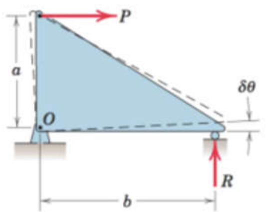
(از جنس انرژی (واحد ژول) ← اسکالر)

* اگر (1 $M, F = 0$ یا (2 $\delta\vec{r}$ یا $\delta\theta$ صفر شود و یا (3 بردار نیرو و جابجایی بر هم عمود باشند ← کار انجام شده صفر است.

* جابجایی مجازی (Virtual Displacement) و کار مجازی (Virtual Work)

- فرض کنید جسمی تحت نیروهای وارد بر آن در تعادل قرار دارد. هر گونه جابجایی کوچک دلخواه (فرضی) سازگار با قیود مسئله (بی‌نهایت کوچک) را جابجایی مجازی (δr) گویند و کار نیروها به ازای این جابجایی مجازی را کار مجازی نامند.





کار مجازی انجام شده توسط $\vec R$: $\delta U_1 = \vec R \cdot \delta\vec r_R = (R\,j)\cdot(b\,\delta\theta\,j)$

$= +Rb\,\delta\theta$

به عنوان مثال: کار مجازی انجام شده توسط $\vec F_1$: $\delta U_1 = \vec F_1 \cdot \delta\vec r$

کار مجازی انجام شده توسط $\vec P$: $\delta U_2 = \vec P \cdot \delta\vec r_P = (P\,i)\cdot(-a\,\delta\theta\,i)$

$= -Pa\,\delta\theta$

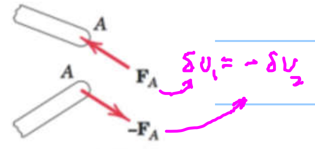
چون که نیرو و جابجایی در خلاف جهت هم هستند.

- انواع نیروهای وارد بر سیستم‌های ایده‌آل متشکل از یک یا چند جسم صلب:

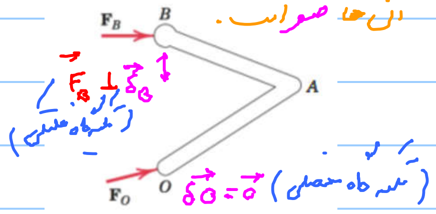
1) نیروهای فعال: کار انجام می‌دهند در اثر جابجایی مجازی می‌باشند.

2) نیروهای واکنشی (تکیه‌گاهی): با توجه به صفر بودن $\delta\vec r$ یا عمود بودن $\delta\vec r$ بر این نیروها، کار آن‌ها صفر است.

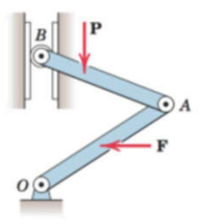
3) نیروهای داخلی: با توجه به خنثی شدن نیروهای داخلی، جمع کارهای انجام شده صفر است.



(c) Internal forces



(b) Reactive forces

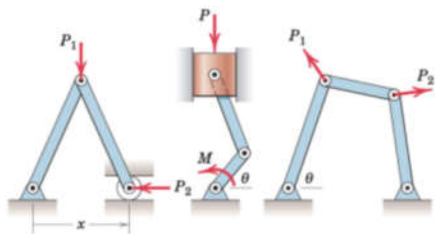


(a) Active forces

- اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work): مجموع کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی فعال وارد بر یک سیستم مکانیکی ایده‌آل در حال تعادل، به ازای هر جابجایی مجازی سازگار با قیود مسئله، صفر است:

$\boxed{\delta U = 0}$ ← مجموع کار مجازی نیروهای فعال صفر است

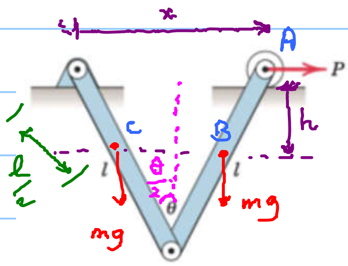
- در حل مسائل با استفاده از روش کار مجازی، به جای رسم دیاگرام آزاد (شامل همه نیروها)، فقط نیروهای فعال را رسم می‌کنیم (= دیاگرام نیروهای فعال). سپس با نسبت به ازای تک تک نیروهای فعال، جابجایی مجازی نقطهٔ اثر اعمال آن نیرو را برحسب جابجایی مجازی متغیر (های ؟) مستقل سینماتیکی مسئله نوشته و در رابطهٔ کار هر نیرو را محاسبه می‌کنیم.



دیاگرام نیروهای فعال سیستم تک درجه آزادی

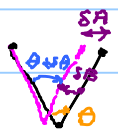
! ما در این فصل، فقط سیستم‌های تک درجه آزادی (تک متغیر مستقل سینماتیکی) را بررسی می‌کنیم.

* گاهی اوقات معمولاً با نگاه ظاهری به مسئله، نمی‌توان جابجایی مجازی یک نقطه را برحسب متغیر مستقل سینماتیکی مشخص نمود؛ در این حالت می‌بایست بردار موقعیت نقطه مورد نظر را نوشته و با variation گیری (= مشتق مرتبه اول)، جابجایی مجازی آن نقطه را محاسبه نمود.



- مثال: اگر جرم میله‌ها m بوده و سیستم در تعادل باشد، زاویه تعادلی θ را بیابید. eq.

* سیستم تک درجه آزادی است؛ به ازای θ جابجایی مجازی δθ می‌دهیم. باید سیستم که نقاط



A، B و C جابجایی مجازی برحسب δθ خواهند داشت. ← با توجه به اینکه به صورت ظاهری نمی‌توان جابجایی‌های مجازی نقاط مورد نظر را محاسبه کرد، از نوشتن بردار مکان بهره می‌بریم.

$$\vec{r}_A = x\hat{i} = \left(l\sin\frac{\theta}{2} + l\sin\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \vec{r}_A = 2l\sin\frac{\theta}{2}\hat{i} \rightarrow \delta\vec{r}_A = l\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,\hat{i}$$

$$\vec{r}_B = \left(l+\frac{l}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}\hat{i} - \frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2}\hat{j} \Rightarrow \delta\vec{r}_B = \frac{3l}{4}\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,\hat{i} + \frac{1}{4}l\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_C = \frac{l}{2}\sin\frac{\theta}{2}\hat{i} - \frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2}\hat{j} \Rightarrow \delta\vec{r}_C = \frac{l}{4}\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,\hat{i} + \frac{l}{4}\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,\hat{j}$$

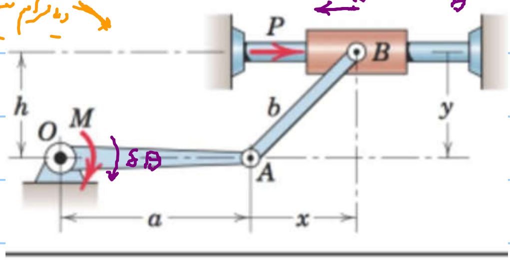
با توجه به جهت نیروها فقط مولفه $\hat{j}$ آن ها مهم است

اصل کار مجازی : $\delta U = 0 \Rightarrow (P\hat{i}).\vec{\delta r}_A + (-mg\hat{j}).\vec{\delta r}_B + (-mg\hat{j}).\vec{\delta r}_c = 0$

$$\Rightarrow P\,l\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta - 2mg\,\frac{l}{4}\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta = 0 \Rightarrow tg\,\frac{\theta}{2} = \frac{2P}{mg} \Rightarrow \left\{ \theta_{eq.} = 2tg^{-1}\frac{2P}{mg} \right.$$

دیاگرام نیروهای فعال

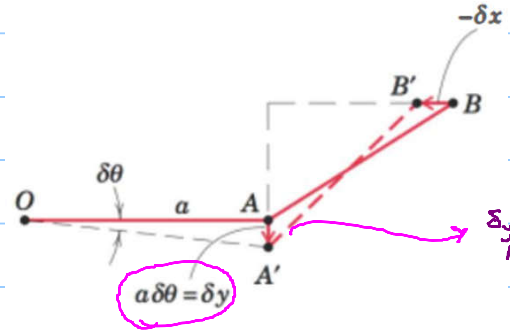
$\delta_B : f(\delta_\theta) = ?$



— مثال : در لحظه نشان داده شده، مکانیزم در حالت تعادل باشد، نیروی P را برحسب M محاسبه نمایید.

* به نسبت زمین OA، جابجایی مجازی $\delta\theta$ در جهت ساعتگرد می‌دهیم

حال باید جابجایی مجازی نقطه B را برحسب $\delta\theta$ بیابیم :



$\delta_{y_A} = \delta_y = a\,\delta\theta$

مشتق بگیریم

ازطرفی : $b^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 0 = 2x\,\delta x + 2y\,\delta y$

ثابت

متغیر نسبت به مکان B, A

$\Rightarrow \delta_x = -\frac{y}{x}\,\delta_y$

$$\Rightarrow \delta_x = \frac{-y}{x}\,a\,\delta\theta$$

$$\delta U = 0 \Rightarrow M\delta\theta + P\delta x = 0 \Rightarrow M\delta\theta + P\left(\frac{-y}{x}\,a\,\delta\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{Mx}{ya} \quad \text{در این لحظه :} \left\{ \begin{array}{l} y = h \\ x = \sqrt{b^2 - h^2} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{P = \frac{M\sqrt{b^2-h^2}}{ha}}$$