به نام خدا

جلسه سوم و چهارم

فصل دوم - سیستم های نیروی

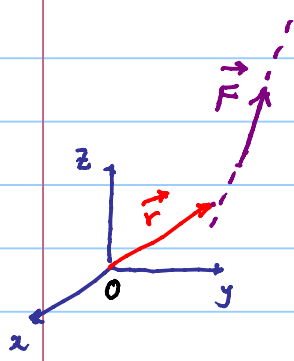
سر فصل مطالب :

- مفهوم گشتاور نیروها نسبت به نقطه و محور

- سیستم های نیروی معادل و ساده سازی آن ها

- برایند دورانی (رینچ)

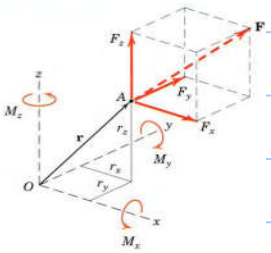
گشتاور نیرو نسبت به یک نقطه (Moment about a point) ← (یک بردار است)

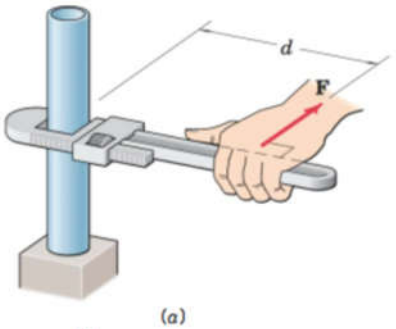


$\vec{r}$: بردار مکان یا موقعیت برداری است که از نقطه مورد نظر (در اینجا O) به امتداد نیرو وصل می‌شود.

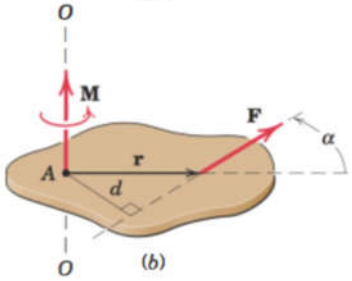
$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$
$$\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

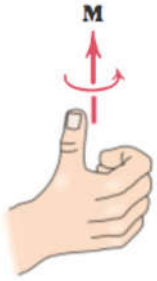




(a)



(b)

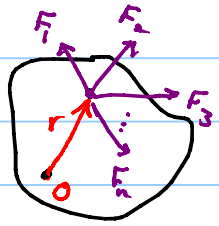


(c)

Varignon's Theorem :

گشتاور برآیند چند نیروی متقارب نسبت به یک نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای تک تک آن ها در نقطه ی متقارب نسبت به نقطه ی مرجع اولیه. (عکس این قضیه نیز صادق است!)

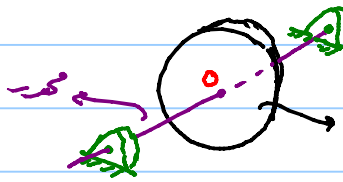
اثبات :



$$\vec{M}_o = \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \dots + \vec{r}\times\vec{F}_n =$$

$$= \vec{r}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\dots+\vec{F}_n) = \vec{r}\times\vec{F}_{net}$$

گشتاور نیرو نسبت به یک محور :



یا بیان (به گام هایی که اجازه چرخش بدهد)

گشتاور نیرو نسبت به عمود بر محور بوده و در نقطه ی O به محور متصل است و می تواند با آن بچرخد.

- مهمترین گشتاور نیرو نسبت به محور : خاصیت دورانی است که نیرو حول محور به وجود می آورد.

سوال : در چه صورت هایی مقدار نیروی وارد بر دست هر چقدر هم زیاد باشد، نمی تواند مجموعه ی محور و دست را بچرخاند؟ (= در چند صورتی نیرو نسبت به محور گشتاور ندارد یا گشتاورش نسبت به محور صفر است)

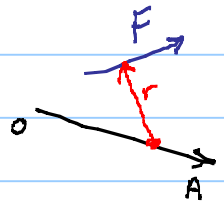
1- نیرو با محور موازی باشد.

2- نیرو عمود بر محور باشد و محور را قطع کند. ← نیرو با محور هم صفحه باشد.

3- نیرو دقیقا نقطه محور را قطع کند.

- وقتی که نیرو با محور متقاطر باشد، باعث چرخش محور و دست می شود.

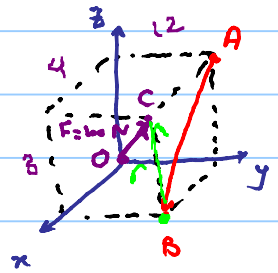
- گشتاور یک بردار نسبت به یک محور، عبارت است از مولفه‌ی گشتاور برآیند نسبت به نقطه‌ی دلخواهی بر محور که در امتداد محور قرار می‌گیرد.



$$|\vec{M}_{OA}| = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{e}_{OA}$$

$$\vec{M}_{OA} = |\vec{M}_{OA}|\, \hat{e}_{OA}$$

- مثال: گشتاور نیروی 100 N (در امتداد مرکز مستطیل) را حول AB (قطری از سطح‌های جانبی آن) به دست آورید.



$$\vec{r} = 3\hat{k}$$

$$\vec{F} = 100\left(\frac{4i + 12j + 3k}{13}\right) = \frac{400}{13}i + \frac{1200}{13}j + \frac{300}{13}k$$

$$\vec{AB} = 4i - 3k \Rightarrow \hat{e}_{AB} = \frac{4}{5}i - \frac{3}{5}k$$

$$M_{AB} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{e}_{AB} = -276.92 \text{ N.m}$$

$\vec{M}_B$ گشتاور $\vec{F}$ حول نقطه‌ی B

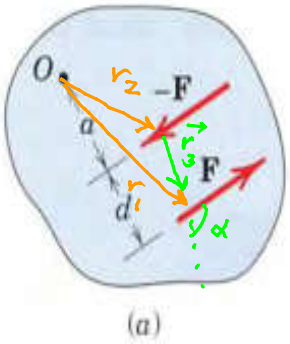
$$\Rightarrow \vec{M}_{AB} = -276.92\left(\frac{4}{5}i - \frac{3}{5}k\right) = -221.54i + 166.15k$$

- اثر نیرو بر جسم : ایجاد حرکت انتقالی و دورانی ، ایجاد کشش و فشار در جسم .

* سیستم نیرویی : به مجموعه نیروهای که بر جسم وارد می شود، سیستم نیرویی وارد بر آن جسم گویند.

- سیستم های نیرویی معادل : سیستم هایی که اثر کشش، فشاری و خمشی یکسانی دارند.

- زوج نیرو و لنگر زوج (کوپل Couple) : لنگر دو نیروی موازی، خلاف جهت و غیر هم خط را کوپل گویند.



(a)

$$\vec{C} = \sum \vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r}_3 \times \vec{F}$$

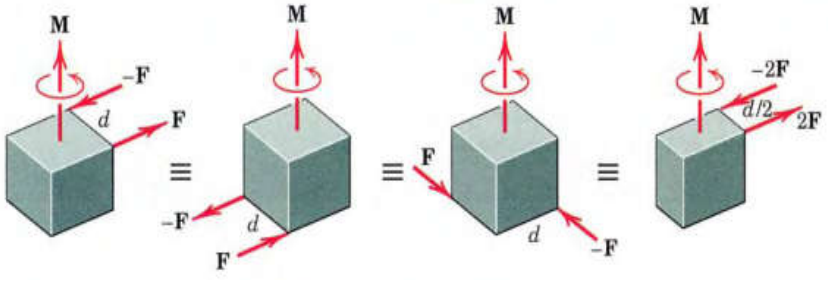
$$|\vec{C}| = |\vec{r}_3||\vec{F}| \sin\alpha = (|\vec{r}_3| \sin\alpha)\,|\vec{F}| = d \cdot F$$

اندازه $\vec{C}$: حاصلضرب بردار $\vec{r}_3$ و $\vec{F}$ (حاصلضرب برداری)

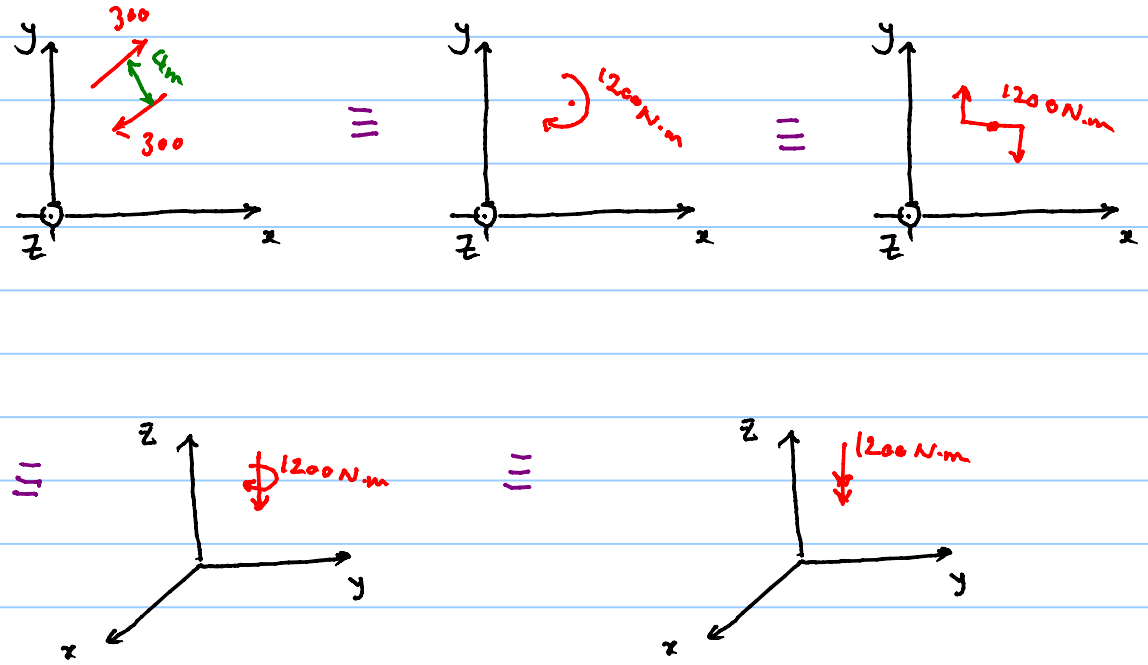
جهت $\vec{C}$: قانون دست راست

لنگر زوج نیرو به نقطه لنگر برداری بستگی ندارد

- زوج های معادل : زوج نیروهایی که لنگرشان برابر باشد، زوج نیروهای معادل گویند



- تاثیر زوج نیروها :



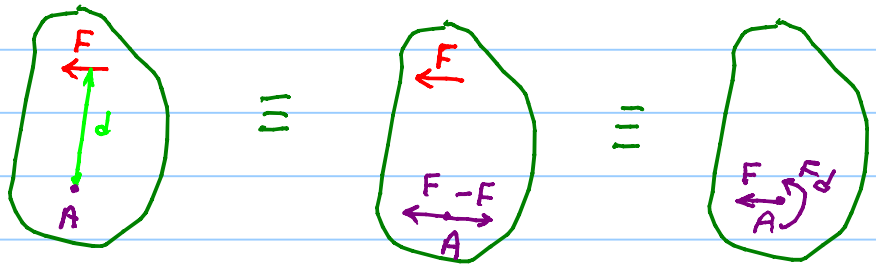
* برای بررسی اثرات خارجی در اجسام صلب (و به صورت خاص در حالت تعادل) = بررسی استاتیکی)، می‌توانیم تغییرات زیر را در سیستم نیروی به وجود آوریم :

1- می‌توانیم تعدادی نیروی متقارب را با برآیند آن‌ها جایگزین کنیم و یا برعکس، نیرو را با تمام مولفه‌هایش جایگزین کنیم (حالت خاص : می‌توانیم بردارهای حتی به سیستم اضافه کنیم)

2- می‌توانیم هر نیرو را به عنوان یک بردار لغزنده در امتداد خود منتقل کنیم.

3- می‌توانیم زوج نیرو ها را بردارهای آزاد در نظر بگیریم.

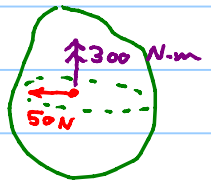
سوال - انتقال نیرو به سوالات استاد اولیه چگونه امکان پذیر است؟



- سیستم های نیروی وارد بر ان ها:

* پس از ساده سازی، یک سیستم نیروی دلخواهی را می توان فقط با یک نیرو و یک سیستم نیروی دلخواهی را با یک نیرو و یک کوپل معادل با آن نمایش داد.

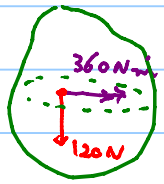
- مثال: سیستم های نیروی داده شده را فقط با یک نیرو جایگزین کنید.

1) 

⟹ نیرو به اندازه خود 6m به داخل صفحه منتقل کنیم

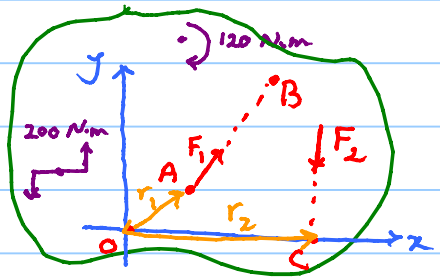
2)

⟹ نیرو را 2.5m به راست منتقل کنیم.

3) 

⟹ نیرو را 3m بیرون صفحه بیاوریم.

مثال: برآیند نیروی نشان داده شده در شکل به نقطه‌ی O منتقل شده. اگر سیستم را فقط با یک نیرو معادل کنیم، امتداد نیرو محور x ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟



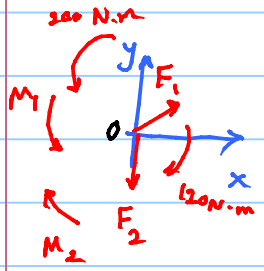
$F_1 = 200\ N$, $A = (1,1)$, $B = (4,5)$

$F_2 = 80\ N$, $C = (6,0)$

$$\vec{F_1} = F_1 \hat{e}_F = F_1 \cdot \frac{\vec{AB}}{|AB|} = 200\left(\frac{(4-1)i + (5-1)j}{\sqrt{3^2+4^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F_1} = 120i + 160j$$

$$\vec{F_2} = -80j$$

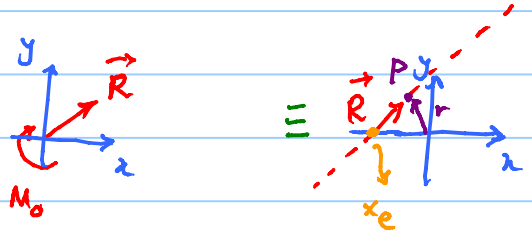


$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \rightarrow \vec{R} = 120i + 80j \rightarrow \begin{cases} |\vec{R}| = 144.2\ N \\ \theta = 33.69^\circ \end{cases}$$

$$\sum \vec{M_o} = \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} + \vec{M_3} + \vec{M_4}$$

$$= (1i + 1j) \times (120i + 160j) + (6i) \times (-80j) + 200\hat{k} - 120\hat{k}$$

$$= +40\hat{k} - 480\hat{k} + 200\hat{k} - 120\hat{k} \Rightarrow \sum \vec{M_o} = -360\hat{k}\ N.m$$



$P = (x_p, y_p)$: نقطه‌ای دلخواه روی خط اثر نیرو

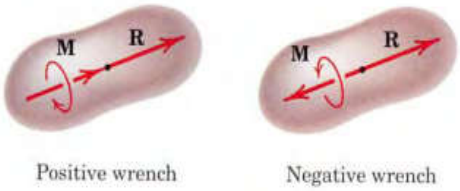
$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M_o}$$

$$(x_p i + y_p j) \times (120i + 80j) = -360\hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{80x_p - 120y_p = -360}$$ معادله‌ی خط اثر نیروی برآیند

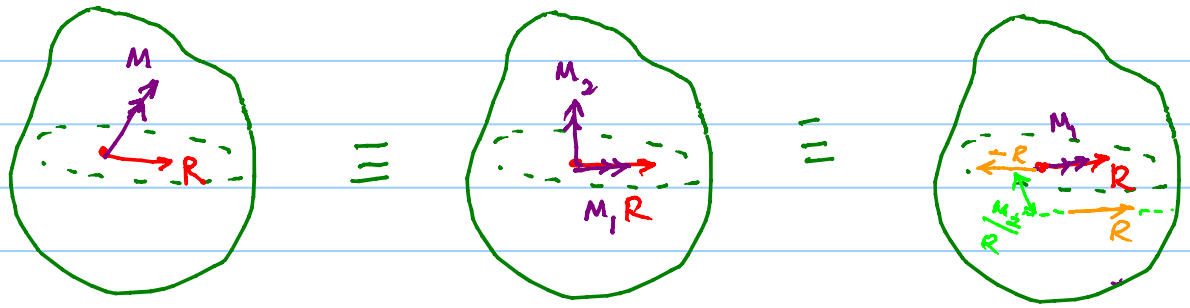
طول از مبدأ: $y_p = 0 \rightarrow 80x_p = -360 \Rightarrow \boxed{x_p = -4.5\ m}$

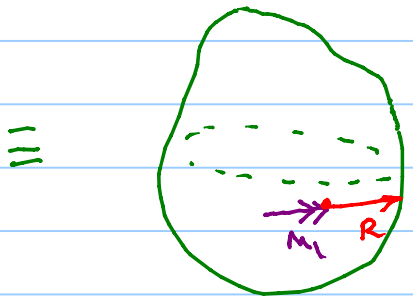
- برآیند دوری یا برآیند پیچ لوشتی وار (wrench) : به ترکیبی از نیروها گویند که عمود بر هم باشند.



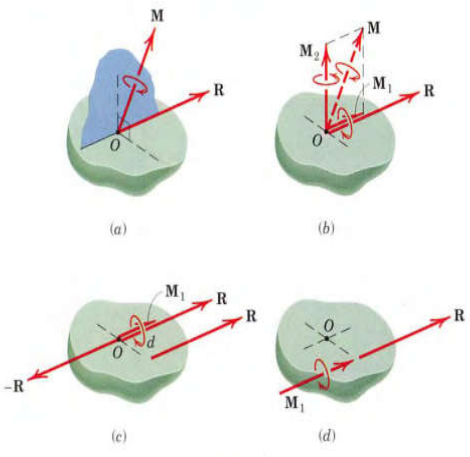
Positive wrench Negative wrench

- آیا می‌توان در یک سیستم نیروی سه بعدی، برآیند نیروها و زوج نیروها را به صورت پیچ حاصل کرد؟ چگونه؟



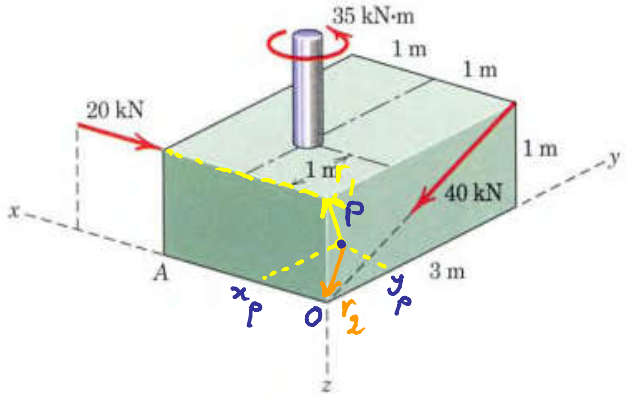


سؤال - یک سیستم نیروی در فضای سه بعدی چه خاصیتی داشته باشد تا برآیند آن به صورت یک نیروی منفرد (!) ظاهر شود؟



زمانی که بردار برآیند، مولفه‌ای در جهت نیروی برآیند نداشته باشد یا بردار برآیند نیرو عمود باشد.

- مثال: برایند سیستم نیروی زیر را به صورت یک نیرو و یک ممان حول نقطه‌ای در صفحه xy به دست آورید. نیرو و ممان حاصل شده (= پیچ) در آن نقطه صفحه را قطع کرده، بر آن عمود باشد.



- روی کدام نقطه P، نقطه‌ای در صفحه xy باشد که سیستم معادل نیروی برایند آن دارای یک پیچ شود:

$$P = (x_P, y_P, 0)$$

- تذکر: در حالت کلی P روی خطی واقع است که برایند نیروها و ممان‌های وارد بر سیستم در تمام نقاط آن خط به صورت پیچ قابل بیان است (= بی‌شمار نقطه وجود دارد)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-20\,i) + 40\left(\frac{-3j+1k}{\sqrt{3^2+1^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{R} = -20i - 37.95\,j + 12.65\,k \quad kN$$

$$\vec{M}_P = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{M}_3$$

$$= (-x_P, -y_P, -1) \times (-20\,i) + (-x_P, -y_P, 0) \times (0, -37.95, 12.65) + (-35\hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{M}_P = (-12.65\,y_P)\hat{i} + (20 + 12.65\,x_P)\hat{j} + (-20\,y_P + 37.95\,x_P - 35)\hat{k}$$

در نقطه P پیچ داریم: $\vec{R} \parallel \vec{M}_P \Rightarrow \hat{e}_R = \pm \hat{e}_{M_P}$

$$\Rightarrow \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \pm \frac{\vec{M}_P}{|\vec{M}_P|}$$

$$\Rightarrow \frac{-20i - 37.95j + 12.65k}{44.72} = \pm \frac{\vec{M}_P}{|\vec{M}_P|}$$

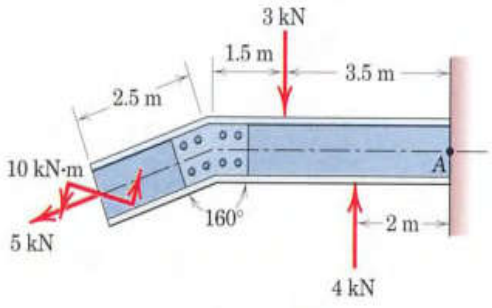
از برابر قرار دادن مولفه‌های نقطه در بردار بالا، مجهولات x_p ، y_p و در نهایت $|\vec{M}_p|$ محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} -12.65\, y_p = \pm\left(-0.447\,|\vec{M}_p|\right) \\ 20 + 12.65\, x_p = \pm\left(-0.849\,|\vec{M}_p|\right) \\ -20 y_p + 37.95\, x_p - 35 = \pm\left(0.238\,|\vec{M}_p|\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_p = 0.222\,m \\ y_p = -0.949\,m \\ |M_p| = -26.86\,kN.m \end{cases}$$

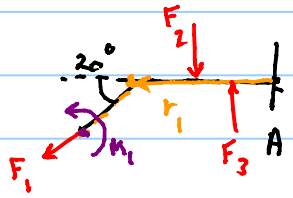
$\pm$ ← علامت گشتاور

منفی ← ساعتگرد است

مثال - برایند نیروهای وارد شده بر جسم را به صورت یک نیرو و یک ممان در نقطه A محاسبه کنید.



توجه: جهت ممان داخل صفحه + است.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 5(\cos 20^\circ\, i - \sin 20^\circ\, j) - 3j + 4j$$

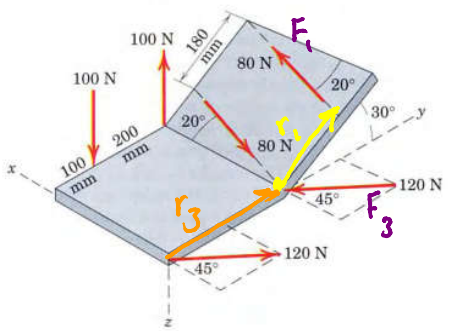
$$\Rightarrow \boxed{\vec{R} = 4.70\,i - 0.71\,j \;\; kN}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{M}_1$$

$$= 5i \times (4.70\,i - 1.71\,j) + 3.5\,i \times (-3j) + 2i \times 4j - 10\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum M_A = -21.05\,\hat{k} \;\; kN.m}$$

مثال- دستگاه زیر، برآیند کوپل داده شده را به نقطه O تحویل دهید.



$$\vec{F}_1 = 80\cos 20^\circ\, i + 80\sin 20^\circ\left(\cos 30^\circ\, j - \sin 30^\circ\, k\right)$$

$$\vec{r}_1 = 0.18\left(\cos 30^\circ\, j - \sin 30^\circ\, k\right)$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -11.72\,\hat{k} - 6.77\,j \quad N.m$$

$$\vec{M}_2 = -20\,i \quad N.m$$

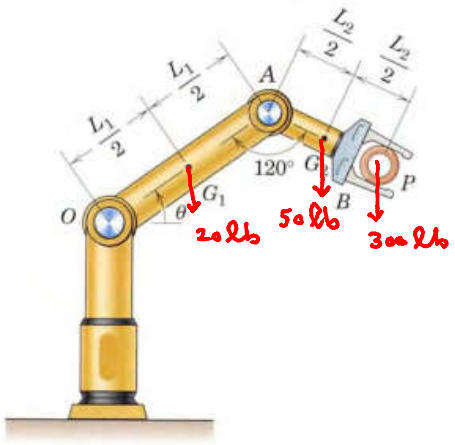
$$\vec{F}_3 = 84.85\,i - 84.85\,j$$

$$\vec{r}_3 = 0.3\,j$$

$$\Rightarrow \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = -25.46\,\hat{k} \quad N.m$$

برآیند کوپل: $\vec{M} = \sum_{i=1}^{3} \vec{M}_i = -20\,i - 6.77\,j - 37.18\,\hat{k} \quad N.m$

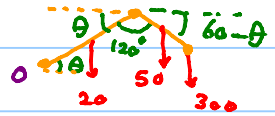
مسئله ۶ سیتوری - در شکل زیر، اگر $L_1 = 3\,ft$، $L_2 = 2\,ft$ و $-45^\circ \le \theta \le 45^\circ$ باشند، ماکزیمم مقدار M_O چقدر است و به ازای چه θ ای رخ می‌دهد؟



$m_{OA} = 20\,lb$

$m_{AB} = 50\,lb$

$m_P = 300\,lb$



$$\sum \vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

$$= \frac{L_1}{2}(\cos\theta\, i + \sin\theta\, j) \times (-120\, j) + \left[\left(L_1\cos\theta + \frac{L_2}{2}\cos(60^\circ-\theta)\right)i + \left(L_1\sin\theta - \frac{L_2}{2}\sin(60^\circ-\theta)\right)j\right] \times (-50\, j)$$

$$+ \left[\left(L_1\cos\theta + L_2\cos(60^\circ-\theta)\right)i + \left(L_1\sin\theta - L_2\sin(60^\circ-\theta)\right)j\right] \times (-300\, j)$$

$$\Rightarrow \sum \vec{M}_O = -180\cos\theta\,\hat{k} - 150\cos\theta\,\hat{k} - 50\cos(60^\circ-\theta)\,\hat{k} - 900\cos\theta\,\hat{k} - 600\cos(60^\circ-\theta)\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{M}_O = \left[-1230\cos\theta - 650\cos(60^\circ-\theta)\right]\hat{k} \quad lb.ft}$$