تحلیل دینامیکی با استفاده از روش کین

مقدمه

در ایـن گزارش اصول کلی حاکم بر روش کین برای استخراج معادلات دینامیکی سیستمهای مکانیکی بیان می‌شود. این روش برای اولین بار توسط Professor Tomas R. Kane ریاضیدان، تئورسین مکانیک و استاد دانشکده مکانیک دانشگاه استنفورد در سال ۱۹۸۵ میلادی مطرح شد و به تدریج به عنوان یک روش کارا برای فرمولاسیون و تحلیل سیستمهای دینامیکی‌مکانیکی شناخته شد. در گزارش آتی از این روش برای تحلیل دینامیکی بدن در حین پرش استفاده خواهد شد و برای روشن‌تر شدن مبانی کار انجام شده، در این گزارش به طور جداگانه تئوری حاکم بر این روش بیان خواهد شد.

پس از بیان مختصری از تئوری حاکم بر این روش در بخش۲-۱، تعدادی مثال مناسب و کلاسیک از این روش در بخش ۲-۲ ارائه خواهد شد. در انتها پس از آن که خواننده دید عمیقتری در مورد این روش پیدا کرد، در بخش ۲-۳ این روش با دیگر روشها مقایسه خواهد شد.

در کل این گزارش طوری تهیه شده است که به خواننده‌ای که هیچ دیدی نسبت به روش کین ندارد، مبانی اولیه این روش را آموزش بدهد و علاوه بر آن بتواند به تنهایی به عنوان یک جزوه آموزشی برای تدریس روش کین به کار گرفته بشود. برای استفاده از دو بخش ۲-۱ و ۲-۲ نیاز به زمینه علمی خاصی نیست. البته خوانندگانی که با روشهایی همچون روش لاگرانژ یا روش گیبزاپل آشنایی داشته

باشند، با مفاهیم مطرح شده در بخش ۲-۱ همچون مختصات و سرعتهای تعمیم یافته آشناتر خواهندبود که در نتیجه می‌توانند بخشهای مربوطه را با سرعت بیشتری مرور کنند و روی مطالب مهمتر تمرکز کنند.

۲ – ۱ مبانی تئوریک روش کین و فرمولاسیون آن:

برای اینکه بتوان از روش کین استفاده کرد باید با مفاهیم متعددی آشنا بود که در این بخش به بیان آنها پرداخته می‌شود و پس از آن آشنایی با این مفاهیم فرمولاسیون روش کین ارائه خواهد شد.

۲ – ۱ - ۱ مختصات تعمیم‌یافته:

برای حل معادلات حاکم بر اجرام متحرک، در اولین گام باید بتوان مکان و سرعت تمام اجرام مورد بررسی را مشخص کرد، تا بتوان معادلات دیفرانسیل حاکم بر آنها را استخراج و حل کرد. برای تعیین مکان نقاط نیاز به تعدادی متغیر است که معمولا تعدادی طول و یا زاویه هستند که با ترکیب روابط هندسی حاکم بر مکانیزمها و یا استفاده از روشهای استانداردی همچون "دناویت هارتنبرگ" موقعیت اجزا را تعیین می‌کنند. این مجموعه متغیرها مختصات "تعمیم‌یافته" نامیده می‌شوند و معمولا با q نمایش داده می‌شوند. تعداد این متغیرها نیز با عدد m مشخص می‌شود که به طور کلی این عدد بزرگتر مساوی درجه آزادی سیستم می‌باشد.

در این مرحله باید به طور دقیق‌تری درجه آزادی را تعریف کرد. اگرچه تعریف متداول درجه آزادی بر مبنای تعیین مکان نقاط است ولی این تعریف در سیستمهای nonholomonic با مشکل مواجه می‌شود و تعریف دقیق‌تر درجه آزادی سیستم بدین قرار است:

حداقل تعداد متغیرهای مستقل که با مشخص بودن زمان و تعیین مقادیر آنها سرعت همه نقاطِ تمامِ اجرام مورد بررسی مشخص می‌شود "درجه آزادی یک مجموعه دینامیکی‌مکانیکی" نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر درجه آزادی توسط تعداد حداکثر شرایط اولیه مستقل سرعت (که باید برای حل معادلات دیفرانسیل حرکت معلوم باشند) تعیین می‌شود. این عدد با n نمایش داده می‌شود و برای یک سیستم که دارای قیدهای nonholomonic نباشد با انتخاب همین تعداد متغیر مختصه تعمیم‌یافته می‌توان مکان تمام اجزا را معین کرد. ولی اگر در یک سیستم قیدی nonholomonic حاکم باشد به تعداد متغیر مستقل بیشتری نیاز است تا مکان را تعریف کرد اما فقط تعداد n متغیر مستقل سرعت مورد نیاز است تا سرعتها را تعیین کرد. همین مساله باعث می‌شود که تعریف دقیق درجه آزادی بر مبنای تعیین سرعتها بیان شده باشد.

به عبارت دیگر اگر تمام قیدها nonholomonic باشد حداقل به تعداد n+m معادله یا متغیر حالت و تعداد m-n=r معادله قید نیاز می‌باشد. البته بسته به روش فرمولاسیون مورد استفاده ممکن است از 2m متغیرحالت استفاده شود که در هر صورت فضای متغیرهای حالت رنک n+m خواهد داشت.

از طرفی به دلایلی مختلف از جمله پیچیدگی هندسه حاکم و یا نیاز به محاسبه نیروهای داخلی در بسیاری از سیستمها از قیدهای holomonic استفاده می‌شود که در این صورت رنک متغیرهای حالت از n+m کمتر خواهد بود و به طور دقیق‌تر اگر فرض شود که:

$$m-n=r=r_{holomonic}+r_{nonholomoic} \qquad (۲ - ۱)$$

رنک فضای حالت برابر $2n+r_{nonholomoic}=2m-2r_{holomonic}-r_{nonholomoic}$ خواهد بود و البته بسته به روش مورد استفاده تعداد متغیرهای حالت مورد استفاده از عدد فوق تا 2m متغیر خواهد بود.

استفاده از معادلات قید اعم از holomonic یا nonholomonic و نحوه تعریف مختصه‌های تعمیم‌یافته پارامتری است که انتخاب آن در اختیار نویسنده معادلات است و اگر به طور هوشمندانه‌تری انتخاب شود معادلات فرم ساده‌تری خواهند داشت و نقاط مبهم و سینگولار کمتر خواهند بود.

۲ – ۱ - ۲ سرعتهای تعمیم‌یافته:

بنا به تعریف زیر سرعت تعمیم‌یافته می‌تواند هر ترکیبی خطی از $1 \le s \le m$ $\dot{q}_s$ به علاوه یک ترم ثابت باشد:

$$u_r = z_r(q,t) + \sum_{i=1}^{m} y_{ri}(q,t)\dot{q}_i \qquad (۲ - ۲)$$

- u_r: سرعت تعمیم‌یافته rام.
- z_r: مقدار ثابت rام.
- $[y_{rs}]$: ماتریس تبدیل.

به طور کلی در نوشتارهای این گزارش اندیس پس‌زیرنویس (X_i) اشاره به شماره مختصات، سرعت و یا نیروی تعمیم‌یافته نظیر یک سرعت یا مختصه تعمیم‌یافته دارد (مگر اینکه خلاف آن تصریح شود)، اندیس پس‌زبرنویس (X^j) اشاره به شماره یا اسم جسم و یا نیروی موثر وارده دارد و اندیس پیش‌زبرنویس (${}^kX$) به نام دستگاهی که در آن یک بردار یا تانسور تعریف می‌شود اشاره می‌کند و یا جسم مبنای اندازه‌گیری را مشخص می‌کند.

تعداد سرعتهای تعمیم یافته برابر تعداد درجات آزادی است و برای تعریف آنها ساده‌ترین راه آن است که یک مجموعه n عضوی از مجموعه m عضوی مختصه‌های تعمیم‌یافته انتخاب شود. اگر این مجموعه n عضو اول مختصات تعمیم‌یافته اول گرفته‌شود تعریف سرعتهای تعمیم‌یافته بدین قرار است:

$$u_r = \dot{q}_r \quad 1 \le r \le n \qquad (۳ - ۲)$$

البته گزینه‌های مختلف دیگری نیز برای تعریف سرعتهای تعمیم‌یافته وجود دارد که یکی از مناسب‌ترین آنها مومنتومهای تعمیم‌یافته نظیر مختصه‌های تعمیم‌یافته می‌باشد که از آنها در استخراج فرم همیلتونی معادلات استفاده می‌شود (مرجع گینسبرگ). البته از روی تجربه می‌توان سرعتهای تعمیم‌یافته را طوری انتخاب‌کرد که معادلات حاصله ساده‌تر و گویاتر باشند.

۲ – ۱ - ۳ سرعتهای جزیی:

با استفاده از تعریف n سرعت تعمیم‌یافته و m-n معادله قید روی سرعتها می‌توان یک دستگاه m معادله، m مجهول با مجهولهای: $\dot{q}_s \quad 1 \le s \le m$ تشکیل داد و از روی آن تمام $\dot{q}_s \quad 1 \le s \le m$ها را بر حسب ترکیبی خطی از $u_r \quad 1 \le r \le n$ها محاسبه کرد و نتیجه را بدین صورت بیان کرد:

$$\dot{q}_s = Z_s(q,t) + \sum_{i=1}^{n} Y_{si}(q,t)\dot{u}_i \qquad (۲ - ۴)$$

از طرفی با توجه به تعریف مختصات تعمیم‌یافته مکان تمام نقاط بر حسب تابعی از $q_s \quad 1 \le s \le m$ها قابل بیان است و در نتیجه با مشتق‌گیری از آن سرعت‌ها بر حسب $\dot{q}_s \quad 1 \le s \le m$ قابل بیان است. در نهایت با استفاده از رابطه فوق سرعت تمام نقاط تابعی خطی از $u_r \quad 1 \le r \le n$ خواهد شد و البته با مشتق‌گیری مجدد از رابطه سرعت، شتاب بر حسب $\dot{u}_r \quad 1 \le r \le n$ و $\dot{q}_s \quad 1 \le s \le m$ به صورت خطی محاسبه خواهد شد. سپس با استفاده مجدد از رابطه فوق، شتابها به فرم تابعی خطی از $\dot{u}_r \quad 1 \le r \le n$ و تابعی غیر خطی از $u_r \quad 1 \le r \le n$ مشخص خواهد شد.

وقتی تمام سرعتها به صورت تابعی از $u_r \quad 1 \le r \le n, q_s \quad 1 \le s \le m, t$ بیان شد. سرعت جزیی یک نقطه مانند P مطابق تعریف برابر خواهد بود با:

$$\vec{V}_r^P = \frac{\partial \vec{V}^P}{\partial u_r} \qquad (۲ - ۵)$$

- $\vec{V}^P$: سرعت مطلق نقطه P.

به عبارت دیگر سرعت جزیی rام نقطه P مشخص کننده ضریب u_r، در سرعت نقطه P است و به طور کلی مانند سرعت یک کمیت برداری می‌باشد که تنها تابعی از $\dot{q}_s \quad 1 \le s \le m, t$ می‌باشد.

همچنین به طور مشابه سرعت جزیی برای سرعت زاویه‌ای قابل تعریف است. سرعت زاویه‌ای جزیی r ام جسم B طبق تعریف برابر است با:

$$\vec{\omega}_r^B = \frac{\partial \vec{\omega}^B}{\partial u_r} \qquad (۲ - ۶)$$

از آنجا که تعداد سرعتهای تعمیم‌یافته برابر درجات آزادی اختیار می‌شود، سرعتهای تعمیم‌یافته مستقل هستند و در نتیجه از ترکیب خطی حاصل‌ضرب آنها در سرعتهای جزیی نظیرشان، سرعتها بدین قرار قابل محاسبه‌اند:

$$\vec{V}^P = \vec{v}^P(q,t) + \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i^P u_i \qquad (۲ - ۷)$$

$$\vec{\omega}^B = \vec{W}^B(q,t) + \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i^B u_i \qquad (۲ - ۸)$$

۲ – ۱ - ۴ نیروهای تعمیم‌یافته:

همانطور که دیفرانسیل جابجایی نیروهای موثر بر حسب مختصات تعمیم‌یافته در روشهایی همچون روش لاگرانژی اثر آنها را در معادله نظیر هر یک از مختصات تعمیم‌یافته مشخص می‌کند، به طور مشابه در روش کین که همچون روش لاگرانژ از معادله همیلتون و ریاضیات حساب تغییرات نشات می‌گیرد از سرعتهای جزیی استفاده می‌شود تانیروی تعمیم‌یافته rام که با F_r نشان داده می‌شود، چنین تعریف شود:

$$F_r = \sum_{i=1}^{\lambda} \vec{V}_r^i . \vec{R}^i + \sum_{j=1}^{\gamma} \vec{\omega}_r^j . \vec{M}^j \qquad (۲ - ۹)$$

- $1 \le i \le \lambda$ $\vec{R}^i$: نشانگر γ تا نیروی موثر.
- $1 \le j \le \gamma$ $\vec{M}^j$: نشانگر γ تا گشتاور موثر.

منظور از نیروی (گشتاور) موثر یا Active Force، نیرو (گشتاوری) است که در اثر آن انرژی به سیستم تزریق می‌شود. این نیروها عمدتا نیروهای خارجی هستند مانند نیروی اصطکاک یک سیستم تک جرمی یک جرم که آزادانه روی سطح شیبدار می‌لغزد و یا مانند گشتاور موتوری لینک متصل به زمین یک روبات با ساختار بندبندی که در این حالت $\vec{V}_r^i$, $\vec{\omega}_r^j$ به ترتیب سرعت مطلق خطی و دورانی جزیی نظیر محل اعمال نیرو یا گشتاور مربوطه می‌باشند.

ولی اگر نیروهایی داخلی‌ای وجود داشته باشند که جابجایی (و یا چرخش برای گشتاورها) در محل اعمال عمل و عکس‌العمل آنها مساوی نباشد و عمود بر راستای خودشان هم نباشد، آنها نیز نیروی موثر شمرده می‌شوند و در این حالت $\vec{V}_r^i$, $\vec{\omega}_r^j$ به ترتیب سرعت نسبی (بین محل اعمال عمل و عکس‌العمل) خطی و دورانی جزیی نیرو یا گشتاور مربوطه می‌باشند. به عنوان مثال در سیستمی شامل

سطح شیبدار و جرم لغزنده، نیروی اصطکاک نیروی موثر داخلی شمرده می‌شود. همچنین در یک روبات بندبند، گشتاور موتوری لینکهای دوم به بعد نیز نیرویی داخلی ولی موثر می‌باشند.

۲ – ۱ - ۵ نیروهای تعمیم‌یافته اینرسی:

مطابق دیدگاه دالامبری در روش کین عبارات مربوط به شتابگیری به سمت دیگر معادله برده خواهند شد و با نام نیروهای اینرسی در یک رابطه جمع نیروها مساوی صفر ظاهر خواهند شد. برای این کار نیروهای اینرسی برای جسم B به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$\tilde{\vec{R}}^B = -m_B \vec{a}^B \qquad (۲ - ۱۰)$$

$$\tilde{\vec{M}}^B = -(I^B \vec{\alpha}^B + \vec{\omega}^B \times I^B \vec{\omega}^B) \qquad (۲ - ۱۱)$$

- $\vec{a}^B$: شتاب مطلق مرکز جرم B.
- m_B جرم جسم B و I^B دیادیک اینرسی حول مرکز جرم آن.
- $\vec{\alpha}^B,\ \vec{\omega}^B$: به ترتیب سرعت و شتاب زاویه‌ای مطلق جسم B.

حال با استفاده از یک مجموع‌گیری روی β تا جسم موجود، مشابه رابطه (۲ – ۹) می‌توان نیروی اینرسی تعمیم‌یافته rام را که با $F^*{}_r$ نشان داده می‌شود، بدین قرار تعریف کرد:

$$F^*{}_r = \sum_{i=1}^{\beta} (\vec{V}_r^i . \tilde{\vec{R}}^i + \vec{\omega}_r^i . \tilde{\vec{M}}^i) \qquad (۲ - ۱۲)$$

- اندیس i نشانگر اجسام مختلف موجود.
- $\vec{V}_r^i,\quad \vec{\omega}_r^i$: سرعتهای مطلق خطی مرکز جرم و دورانی جسم iام.

۲ – ۱ - ۶ معادلات حرکت:

با استفاده از روابط حاکم بر حساب تغییرات می‌توان نشان داد که معادلات شتابگیری با استفاده از تعاریف کین به قرار زیر خواهند بود (مرجع Levinson):

$$F^*{}_r + F_r = 0 \qquad (۲ - ۱۳)$$

معادلات حرکت در روش فوق بر اساس درجات آزادی تنظیم می‌شوند و حتی وجود قیدهای nonholomonic هم تعداد معادلات شتابگیری را زیاد نخواهد کرد. البته باید توجه داشت که معادله فوق که معادله کین نامیده می‌شود، تنها بخشی از معادلات فضای حالت است و تنها با اضافه کردن معادلات نرخ تغییر مختصه‌های تعمیم‌یافته یا معادلات (۲ – ۴) مجموعه معادلات حالت برای m+n متغیر حالت نظیر $1 \le s \le m$ $q_s, 1 \le r \le n$ u_r کامل خواهد شد. این روش فرمولاسیون بسیار مفید و از لحاظ محاسباتی بسیار کارا است و پس از آن که در بخش ۲ – ۲ با ارائه تعدادی مثال آشنایی بیشتری در مورد آن حاصل شد در بخش ۲ – ۳ با روشهای دیگر مقایسه خواهد شد.

در روش فوق تنها نیروهای موثر وارد معادلات می‌شوند و اگر نیروهای داخلی غیر موثر یا نیروهای قیدی مد نظر باشند باید درجات آزادی مجازی‌ای نظیر نیروهای قیدی مورد نظر به سیستم اضافه شود. مثال چهارم بخش ۲ - ۲ از این روش استفاده خواهد کرد که می‌توان برای توضیح بیشتر به آن مثال مراجعه کرد. ولی به طور مجمل می‌توان گفت که این کار دقیقا مشابه محاسبه نیروهای داخلی در فرمولاسیون لاگرانژی است با این تفاوت که در این روش کافی است فقط یک سرعت تعمیم‌یافته نظیر درجه‌آزادی مجازی تعریف شده اضافه شود و نیاز به تعریف مختصات تعمیم‌یافته اضافی‌ای نمی‌باشد.

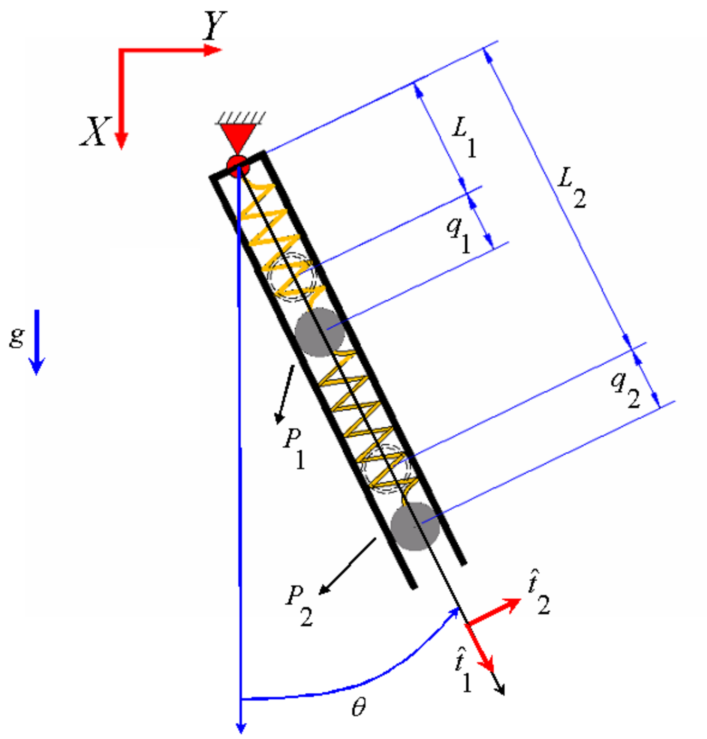
۲ – ۲ حل تعدادی مثال با استفاده از روش کین:

در این بخش تعدادی مساله به روش کین حل خواهد شد و سعی می‌شود جنبه‌های مختلف روش کین به سادگی در طی چند مثال آتی بیان شود.

مثال اول: سیستمی بدون قید

سیستم مورد بررسی مطابق شکل (۲ – ۱) از دو جرم نقطه‌ای P_1, P_2 با جرمهای m_1, m_2 تشکیل شده است که در تیوب بدون اصطکاک T می‌لغزند. این دو جرم مطابق شکل به دو فنر خطی به سختی K_1, K_2 وصل شده‌اند که طول آزاد آنها به ترتیب L_1, L_2 است. تیوب T خود حول محوری افقی

می‌چرخد به نحویکه تابع $\theta(t)$ مشخص است و به عنوان ورودی سیستم فرض می‌شود. مطلوب است معادلات حرکت دو جرم P_1, P_2 .



شکل (۲ - ۱): شکل مثال اول، استخراج معادلات یک سیستم دو درجه آزادی به روش کین.

حل:

سیستم مورد بررسی ۲ درجه آزادی دارد و مطابق شکل از دستگاه مختصات (t_1,t_2,t_3) و دو مختصه q_1, q_2 برای توصیف حرکت استفاده می‌شود. در نتیجه مکان جرمها برابر است با:

$$\vec{r}^{\,p1} = (L_1 + q_1)\hat{t}_1 \qquad (۲ - ۱۴)$$
$$\vec{r}^{\,p2} = (L_1 + L_2 + q_2)\hat{t}_1 \qquad (۲ - ۱۵)$$

با توجه به اینکه دستگاه مختصات (t_1,t_2,t_3) سرعت دورانی دارد. سرعت آنها برابر است با:

$$\vec{\omega}^{\,t1,t2,t3} = \dot{\theta}\hat{t}_3 \qquad (۲ - ۱۶)$$
$$\vec{v}^{\,p1} = \dot{q}_1\hat{t}_1 + (L_1 + q_1)\dot{\theta}\hat{t}_1 \qquad (۲ - ۱۷)$$
$$\vec{v}^{\,p2} = \dot{q}_2\hat{t}_1 + (L_1 + L_2 + q_2)\dot{\theta}\hat{t}_2 \qquad (۲ - ۱۸)$$

در این مرحله سرعتهای تعمیم‌یافته بدین ترتیب تعریف می‌شوند:

$$u_r = \dot{q}_r \quad 1 \le r \le 2 \qquad (۲ - ۱۹)$$

با جاگذاری رابطه فوق در معادلات سرعت نتیجه می‌شود:

$$\vec{v}^{p1} = u_1\hat{t}_1 + (L_1+q_1)\dot{\theta}\hat{t}_1 \quad (۲ - ۲۰)$$
$$\vec{v}^{p2} = u_2\hat{t}_1 + (L_1+L_2+q_2)\dot{\theta}\hat{t}_2 \quad (۲ - ۲۱)$$

و شتاب جرمها برابر خواهد شد با:

$$\vec{a}^{p1} = (u_1-(L_1+q_1)\dot{\theta}^2)\hat{t}_1 + (2u_1\dot{\theta}+(L_1+q_1)\ddot{\theta})\hat{t}_2 \quad (۲ - ۲۲)$$
$$\vec{a}^{p2} = (u_2-(L_1+L_2+q_2)\dot{\theta}^2)\hat{t}_1 + (2u_2\dot{\theta}+(L_1+L_2+q_2)\ddot{\theta})\hat{t}_2 \quad (۲ - ۲۳)$$

سرعتهای جزیی اجرام نیز برابر خواهد شد با:

$$\vec{v}_1^{\,p1} = \hat{t}_1 \quad (۲ - ۲۴)$$
$$\vec{v}_2^{\,p1} = 0 \quad (۲ - ۲۵)$$

$$\vec{v}_1^{\,p2} = 0 \quad (۲ - ۲۶)$$
$$\vec{v}_2^{\,p1} = \hat{t}_1 \quad (۲ - ۲۷)$$

از آنجا که جرمها نقطه‌ای هستند اینرسی دورانی ندارند و بنابراین نیروهای تعمیم‌یافته اینرسی برابر خواهند شد با:

$$F^*{}_1 = -(\vec{v}_1^{\,p1}.(m_1\vec{a}^{p1}) + \vec{v}_1^{\,p2}.(m_2\vec{a}^{p2})) \quad (۲ - ۲۸)$$
$$F^*{}_2 = -(\vec{v}_2^{\,p1}.(m_1\vec{a}^{p1}) + \vec{v}_2^{\,p2}.(m_2\vec{a}^{p2})) \quad (۲ - ۲۹)$$

که با جاگذاری روابط قبلی در روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$F^*{}_1 = -m_1(u_1-(L_1+q_1)\dot{\theta}^2) \quad (۲ - ۳۰)$$
$$F^*{}_2 = -m_2(u_2-(L_1+L_2+q_2)\dot{\theta}^2) \quad (۲ - ۳۱)$$

در مرحله بعد باید نیروهای تعمیم‌یافته نظیر نیروهای موثر را وارد محاسبات کرد. در سیستم مورد بررسی که فقط شامل دو جرم m_1, m_2 است، نیروهای وارده از نیروهای نرمال دیواره (تیوب بدون اصطکاک است)، فنر و وزن تشکیل می‌شود که در این میان تنها نیروی فنر و وزن نیروی فعال هستند و در نتیجه نیروهای موثر برابرند با:

$$\vec{R}^{p1} = (m_1 g\cos(\theta) - k_1 q_1 + k_2(q_2-q_1))\hat{t}_1 + (-m_1 g\sin(\theta))\hat{t}_2 \quad (۲ - ۳۲)$$
$$\vec{R}^{p2} = (m_2 g\cos(\theta) - k_2(q_2-q_1))\hat{t}_1 + (-m_2 g\sin(\theta))\hat{t}_2 \quad (۲ - ۳۳)$$

محل اعمال این نیروها همان مرکز جرمها است که نتیجه می‌شود:

$$F_1 = \vec{v}_1^{\,p1}.\vec{R}^{p1} + \vec{v}_1^{\,p2}.\vec{R}^{p2} \quad (۲ - ۳۴)$$
$$F_2 = \vec{v}_2^{\,p1}.\vec{R}^{p1} + \vec{v}_2^{\,p2}.\vec{R}^{p2} \quad (۲ - ۳۵)$$

که با جاگذاری روابط قبلی در روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$F_1 = (m_1 g\cos(\theta) - k_1 q_1 + k_2(q_2 - q_1)) \qquad (۳۶ - ۲)$$
$$F_2 = (m_2 g\cos(\theta) - k_2(q_2 - q_1)) \qquad (۳۷ - ۲)$$

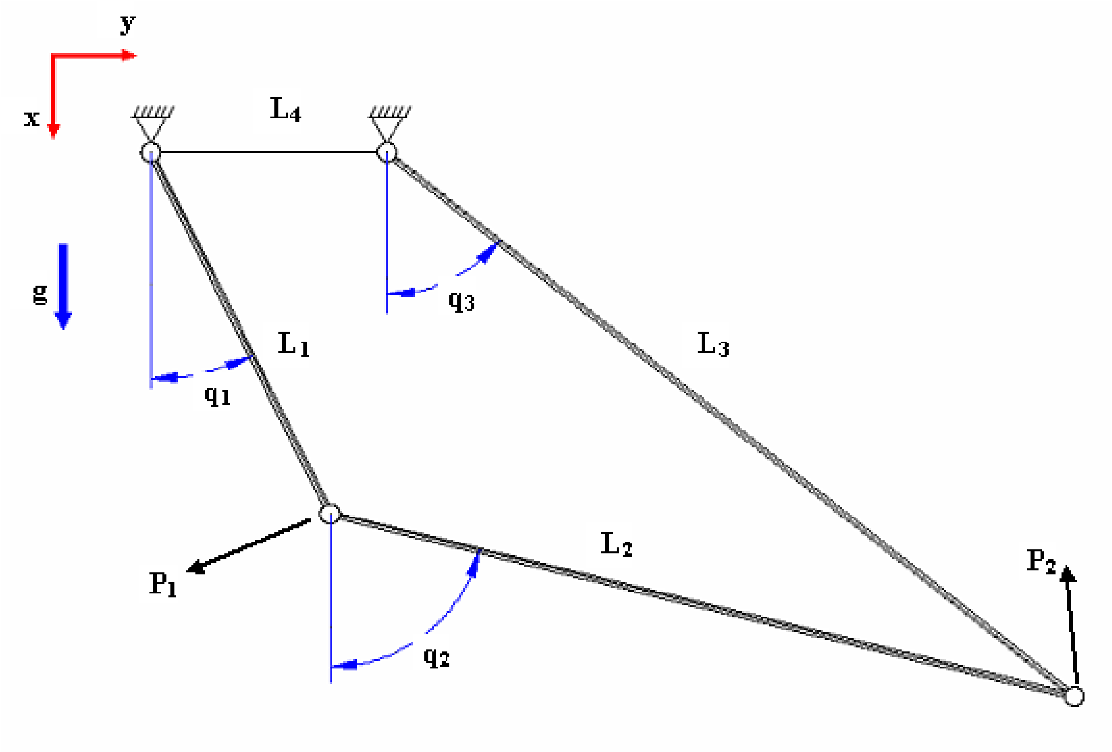
در نهایت با جاگذاری روابط نیروهای تعمیم‌یافته در معادلات کین معادلات شتابگیری به فرم زیر حاصل می‌شود.

$$r = 1: \quad -m_1(u_1 - (L_1 + q_1)\dot{\theta}^2) + (m_1 g\cos(\theta) - k_1 q_1 + k_2(q_2 - q_1)) = 0 \qquad (۳۸ - ۲)$$
$$r = 2: \quad -m_2(u_2 - (L_1 + L_2 + q_2)\dot{\theta}^2) + (m_2 g\cos(\theta) - k_2(q_2 - q_1) = 0 \qquad (۳۹ - ۲)$$

در این مثال خاص برتری این روش به روش نیوتن روشن است، چراکه حداقل دو نیروی داخلی نرمال وارد محاسبات نشده‌اند. ولی در مقابل روش لاگرانژ، حل این مساله با روش کین طولانیتر است و برای چنین مساله ساده‌ای روش لاگرانژ مناسبتر به نظر می‌رسد.

مثال دوم: سیستمی با قیدهای holomonic پیچیده

سیستم مورد بررسی مطابق شکل (۲ – ۲) از دو جرم نقطه‌ای P_1, P_2 با جرمهای m_1, m_2 تشکیل شده است که توسط مکانیزم چهارمیله‌ای نشان داده‌شده در یک صفحه عمودی حرکت می‌کنند. چهارمیله‌ای توسط گشتاور τ که در مگزارش A وارد می‌شود می‌چرخد و میله‌های آن جرم گسترده‌ای ندارند و جرمهای نقطه‌ای P_1, P_2 قرارگرفته در محل اتصال لینکها تنها اینرسی موجود در سیستم می‌باشند. مطلوب است معادله حرکت چهارمیله‌ای.



شکل (۲ - ۲): شکل مثال دوم، استخراج معادلات چهارمیله‌ای با استفاده ازروش کین.

حل:

سیستم مورد بررسی تنها یک درجه آزادی دارد ولی توصیف مکان اجزا آن با یک مختصه تعمیم‌یافته بسیار مشکل است و در عوض مطابق شکل (۲ – ۲) برای توصیف مکان اجزا از ۳ مختصه تعمیم‌یافته استفاده می‌شود. برای سادگی عبارتهای مثلثاتی به فرم زیر نمایش داده می‌شوند:

$$c_i = \cos(q_i) \qquad (۲ - ۴۰)$$

$$s_i = \sin(q_i) \qquad (۲ - ۴۱)$$

با توجه به حلقه موجود در چهارمیله‌ای قید هولومونیک زیر میان مختصه‌های تعمیم‌یافته حاکم می‌باشد:

$$L_1c_1 + L_2c_2 - L_3c_3 = 0 \qquad (۲ - ۴۲)$$

$$L_1s_1 + L_2s_2 - L_3s_3 - L_4 = 0 \qquad (۲ - ۴۳)$$

تک سرعت تعمیم‌یافته مورد نیاز چنین تعریف می‌شود:

$$u_1 = \dot{q}_1 \qquad (۲ - ۴۴)$$

با مشتق‌گیری از دو رابطه قیدی نتیجه می‌شود:

$$L_1 s_1 \dot{q}_1 + L_2 s_2 \dot{q}_2 - L_3 s_3 \dot{q}_3 = 0 \qquad (۲ - ۴۵)$$

$$L_1 c_1 \dot{q}_1 + L_2 c_2 \dot{q}_2 - L_3 c_3 \dot{q}_3 = 0 \qquad (۲ - ۴۶)$$

اگر سه رابطه متوالی فوق به صورت ۳ معادله بر حسب $\dot{q}_i$ها دیده شوند با حل آنها نتیجه می‌شود:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{L_1 \sin(q_3 - q_1)}{L_2 \sin(q_3 - q_2)} \\ \dfrac{L_1 \sin(q_2 - q_1)}{L_3 \sin(q_3 - q_2)} \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ A(q) \\ B(q) \end{bmatrix} u_1 = Y(q) u_1 \qquad (۲ - ۴۷)$$

در مرحله بعد نیروهای اینرسی تعمیم‌یافته محاسبه می‌شود. مکان جرمها برابر است با:

$$\vec{r}^{\,p1} = L_1 (c_1 \hat{i} + s_1 \hat{j}) \qquad (۲ - ۴۸)$$

$$\vec{r}^{\,p2} = L_3 (c_3 \hat{i} + s_3 \hat{j}) + L_4 \hat{j} \qquad (۲ - ۴۹)$$

و سرعت آنها برابر خواهد شد با:

$$\vec{v}^{\,p1} = L_1 \dot{q}_1 (-s_1 \hat{i} + c_1 \hat{j}) \qquad (۲ - ۵۰)$$

$$\vec{v}^{\,p2} = L_3 \dot{q}_3 (-s_3 \hat{i} + c_3 \hat{j}) \qquad (۲ - ۵۱)$$

با جاگذاری روابط (۲ – ۴۷) در روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$\vec{v}^{\,p1} = L_1 u_1 (-s_1 \hat{i} + c_1 \hat{j}) \qquad (۲ - ۵۲)$$

$$\vec{v}^{\,p2} = L_3 B(q) u_1 (-s_3 \hat{i} + c_3 \hat{j}) \qquad (۲ - ۵۳)$$

و سرعتهای جزیی برابر خواهند بود با:

$$\vec{v}_1^{\,p1} = L_1 (-s_1 \hat{i} + c_1 \hat{j}) \qquad (۲ - ۵۴)$$

$$\vec{v}_1^{\,p2} = L_3 B(q) (-s_3 \hat{i} + c_3 \hat{j}) \qquad (۲ - ۵۵)$$

و شتاب جسمهای مورد بررسی برابر خواهد بود با:

$$\vec{a}^{\,p1} = L_1 (\dot{u}_1 (-s_1 \hat{i} + c_1 \hat{j}) + u_1{}^2 (-c_1 \hat{i} - s_1 \hat{j})) \qquad (۲ - ۵۶)$$

$$\vec{a}^{\,p2} = L_3 (B(q) \dot{u}_1 (-s_3 \hat{i} + c_3 \hat{j}) + B(q)^2 u_1{}^2 (-c_3 \hat{i} - s_3 \hat{j}) + \frac{\partial B(q)}{\partial q} \dot{q} u_1 (-s_3 \hat{i} + c_3 \hat{j})) \qquad (۲ - ۵۷)$$

با جاگذاری روابط (۲ – ۴۷) در رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\vec{a}^{\,p2} = L_3 (B(q) \dot{u}_1 (-s_3 \hat{i} + c_3 \hat{j}) + B(q)^2 u_1{}^2 (-c_3 \hat{i} - s_3 \hat{j}) + \frac{\partial B(q)}{\partial q} Y(q) u_1{}^2 (-s_3 \hat{i} + c_3 \hat{j})) \qquad (۲ - ۵۸)$$

نهایتا می‌توان نیروهای اینرسی تعمیم‌یافته را حساب کرد:

$$F^{*p1}{}_1 = -\vec{v}_1^{\,p1}.(m_1\vec{a}^{\,p1}) = -m_1L_1{}^2\dot{u}_1 \qquad (۲ - ۵۹)$$
$$F^{*p2}{}_1 = -\vec{v}_1^{\,p2}.(m_2\vec{a}^{\,p2}) = -m_2L_3{}^2B(q)(B(q)\dot{u}_1 + \frac{\partial B(q)}{\partial q}Y(q)u_1{}^2) \qquad (۲ - ۶۰)$$

و با جمع کردن دو رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$F^*{}_1 = F^{*p2}{}_1 + F^{*p2}{}_1 = -(m_1L_1{}^2\dot{u}_1 + m_2L_3{}^2B(q)(B(q)\dot{u}_1 + \frac{\partial B(q)}{\partial q}Y(q)u_1{}^2)) \qquad (۲ - ۶۱)$$

در مرحله بعد باید نیروهای تعمیم‌یافته را محاسبه کرد. این نیروها حاصل اثر گشتاور ورودی و نیروهای وزن دو جرم P_1, P_2 هستند. برای نیروهای وزن:

$$\vec{R}^{W1} = m_1g\hat{i} \qquad (۲ - ۶۲)$$
$$\vec{R}^{W2} = m_2g\hat{i} \qquad (۲ - ۶۳)$$

محل اعمال این نیروها همان مراکز دو جرم نقطه‌ای P_1, P_2 است و همان سرعتهای جزیی را دارد و در نتیجه:

$$F^W{}_1 = \vec{v}_1^{\,p1}.\vec{R}^{W1} + \vec{v}_1^{\,p2}.\vec{R}^{W2} = -g(m_1L_1s_1 + m_3L_3s_3B(q)) \qquad (۲ - ۶۴)$$

همچنین برای گشتاور اعمالی:

$$\vec{R}^\tau = \tau\hat{k} \qquad (۲ - ۶۵)$$
$$\vec{\omega}^\tau = \dot{q}_1\hat{k} = u_1\hat{k} \qquad (۲ - ۶۶)$$
$$\vec{\omega}_1{}^\tau = \hat{k} \qquad (۲ - ۶۷)$$
$$F^\tau{}_1 = \dot{\omega}_1{}^\tau.\vec{R}^\tau = \tau \qquad (۲ - ۶۸)$$

که در نهایت با جمع اثر وزن و گشتاور نتیجه می‌شود:

$$F_1 = F^\tau{}_1 + F^W{}_1 = \tau - g(m_1L_1s_1 + m_3L_3s_3B(q)) \qquad (۲ - ۶۹)$$

با جاگذاری در معادله کین و کمی جابجاکردن عبارات حاصله معادله نهایی به فرم زیر بدست می‌آید:

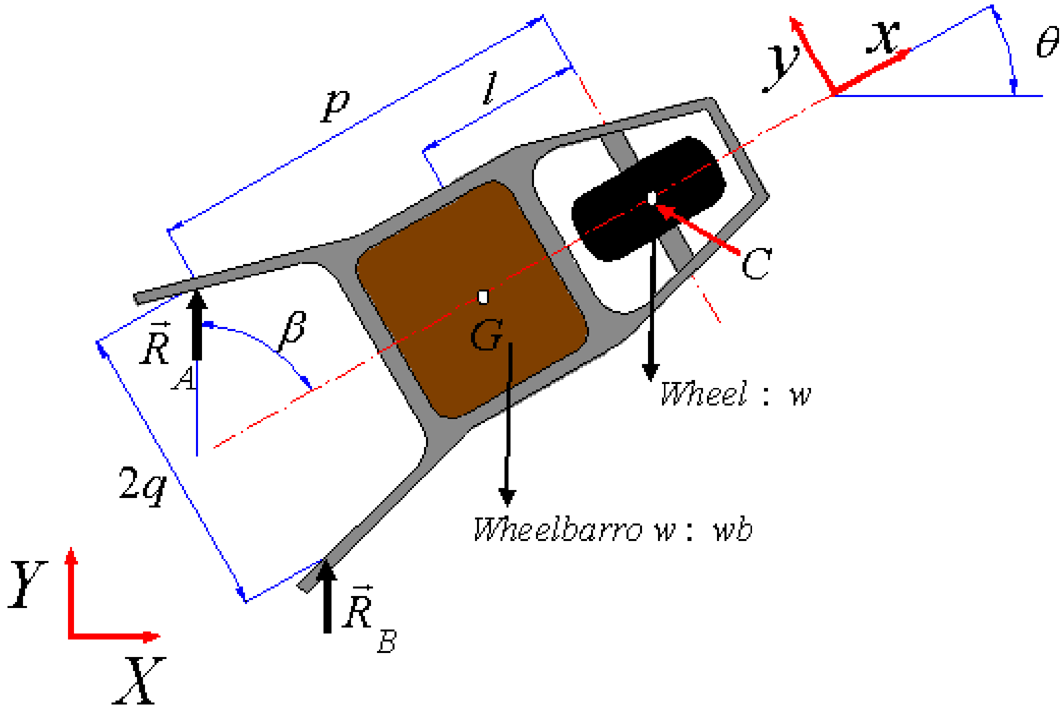
$$(m_1L_1{}^2 + m_2L_3{}^2B(q)^2)\dot{u}_1 + m_2L_3{}^2B(q)\frac{\partial B(q)}{\partial q}Y(q)u_1{}^2 + g(m_1L_1s_1 + m_3L_3s_3B(q)) = \tau \qquad (۲ - ۷۰)$$

معادله فوق بسیار ارزشمند است و هرگز با روشهای مرسومی چون روش نیوتنی و یا روش لاگرانژی نمی‌توان به این سادگی به چنین معادله‌ای رسید. در روش نیوتنی برای رسیدن به چنین فرمولاسیونی نیاز به محاسبات بسیار زیادی است و روش لاگرانژی مرسوم به چند معادله همراه با قید می‌رسد که هم پیچیده‌تر هستند و هم حل زمانی آنها پرهزینه‌تر است. از سوی دیگر این معادله تنها یک

متغیر دارد و عملیات بهینه‌سازی روی آن آسانتر صورت می‌گیرد. یک نکته قابل توجه آن است که می‌توان عبارات پیچیده‌تر (مانند اثر P_2 در معادلات فوق) را به روش کین محاسبه کرد و عبارات ساده‌تر (مانند اثر P_1 و یا اثر τ در معادلات فوق) را با استفاده از روشهای دیگر وارد معادلات کرد.

مثال سوم: سیستمی با قیدهای nonholomonic

سیستم مورد بررسی مطابق شکل (۲ – ۳) یک گاری‌دستی است که در صفحه‌ای افقی بدون هیچ‌گونه لغزشی می‌غلطد. جرم ارابه m_{wb}، مرکز جرم آن G و ممان اینرسی آن حول محور عمودی I می‌باشد. جرم چرخ m_w، شعاع آن r و ممان اینرسی آن حول محور چرخش آن J می‌باشد. دو نیروی خارجی R_B, R_A که مطابق شکل مولفه افقی آنها با محور طولی ارابه زاویه β می‌سازد و اندازه آن F می‌باشد، به ارابه وارد می‌شوند و عامل حرکت آن می‌باشند. مطلوب است معادلات حرکت ارابه:



شکل (۲ - ۳): شکل مثال سوم، استخراج معادلات حرکت برای سیستمی با قیدهای nonholomonic.

حل:

از آنجا که حرکت ارابه صفحه‌ای است، سیستم مورد بررسی تنها دو درجه آزادی دارد. اما برای توصیف مکان اجزا آن به ۴ مختصه تعمیم‌یافته نیاز است و در واقع ۲ قید nonholomonic بر حرکت آن حاکم است که هر دو قید مربوط به عدم لغزش چرخ می‌باشند.

مطابق شکل دستگاه XYZ متصل به زمین و دستگاه xyz متصل به ارابه فرض می‌شود. مختصات تعمیم‌یافته به قرار زیر تعریف می‌شود:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ X_c \\ Y_c \end{bmatrix} \quad (۲ - ۷۱)$$

- ϕ: زاویه غلطش چرخ.
- X_c, Y_c: محل مرکز چرخ.
- θ: زاویه محور طولی ارابه با محور X مرجع.

برای انتخاب سرعتهای تعمیم‌یافته باید دو سرعت مستقل طوری تعیین شوند که با داشتن آنها سرعت تمام نقاط مشخص باشد. برای اینکار سرعتهای تعمیم‌یافته بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (۲ - ۷۲)$$

- v: اندازه سرعت نقطه C.

از آنجا که v در امتداد محور طولی ارابه است و البته از روی X_c, Y_c هم قابل محاسبه است نتیجه می‌شود:

$$\vec{v}^w = \vec{v}^C = \dot{X}_c \hat{I} + \dot{Y}_c \hat{J} = v\hat{i} \quad (۲ - ۷۳)$$

از رابطه فوق دو رابطه بین $u, \ \dot{q}$ نتیجه می‌شود:

$$\dot{X}_c = v\cos(\theta) = u_1 \cos(\theta) \quad (۲ - ۷۴)$$

$$\dot{Y}_c = v\sin(\theta) = u_1 \sin(\theta) \quad (۲ - ۷۵)$$

همچنین شرط عدم لغزش طولی چرخ نتیجه می‌دهد:

$$\dot{\phi} = \frac{v}{r} = \frac{u_1}{r} \quad (۲ - ۷۶)$$

بدین ترتیب مجموعه روابط بین $u,\ \dot{q}$ کامل می‌شود و حال باید نیروهای اینرسی را محاسبه کرد:

برای چرخ و ارابه نرخهای زاویه‌ای برابرند با:

$$\vec{\omega}^{wb}=\dot{\theta}\hat{K}=u_2\hat{K}=u_2\hat{k} \qquad (۲ - ۷۷)$$
$$\vec{\alpha}^{wb}=\ddot{\theta}\hat{K}=\dot{u}_2\hat{K} \qquad (۲ - ۷۸)$$

$$\vec{\omega}^{w}=\vec{\omega}^{wb}+\dot{\phi}\hat{j}=\frac{u_1}{r}\hat{j}+u_2\hat{k} \qquad (۲ - ۷۹)$$
$$\vec{\alpha}^{w}=\frac{\dot{u}_1}{r}\hat{j}+\dot{u}_2\hat{k}+\vec{\omega}^{wb}\times\vec{\omega}^{w}=-\frac{u_1u_2}{r}\hat{i}+\frac{\dot{u}_1}{r}\hat{j}+\dot{u}_2\hat{k} \qquad (۲ - ۸۰)$$

سرعت و شتاب خطی مرکز جرم چرخ و ارابه برابرند با:

$$\vec{v}^{wb}=\vec{v}^{G}=\vec{v}^{C}+\vec{\omega}^{wb}\times\vec{r}^{G/C}=v\hat{i}-l\dot{\theta}\hat{j}=u_1\hat{i}-lu_2\hat{j} \qquad (۲ - ۸۱)$$

$$\vec{a}^{w}=\vec{a}^{C}=\frac{d(u_1\hat{i})}{dt}=\dot{u}_1\hat{i}+u_1u_2\hat{j} \qquad (۲ - ۸۲)$$
$$\vec{a}^{wb}=\vec{a}^{G}=\vec{a}^{C}+\vec{\alpha}^{wb}\times\vec{r}^{G/C}+\vec{\omega}^{wb}\times(\vec{\omega}^{wb}\times\vec{r}^{G/C})=(\dot{u}_1+l{u_2}^2)\hat{i}+(u_1u_2-l\dot{u}_2)\hat{j} \qquad (۲ - ۸۳)$$

سرعتهای جزیی برابرند با:

$$\vec{\omega}_1{}^{wb}=0 \qquad (۲ - ۸۴)$$
$$\vec{\omega}_2{}^{wb}=\hat{k} \qquad (۲ - ۸۵)$$

$$\vec{\omega}_1{}^{w}=\frac{1}{r}\hat{j} \qquad (۲ - ۸۶)$$
$$\vec{\omega}_2{}^{w}=\hat{k} \qquad (۲ - ۸۷)$$

$$\vec{v}_1{}^{w}=\hat{i} \qquad (۲ - ۸۸)$$
$$\vec{v}_2{}^{w}=0 \qquad (۲ - ۸۹)$$

$$\vec{v}_1{}^{wb}=\hat{i} \qquad (۲ - ۹۰)$$
$$\vec{v}_2{}^{wb}=-l\hat{j} \qquad (۲ - ۹۱)$$

برای محاسبه نیروهای اینرسی تعمیم‌یافته با توجه به تقارن چرخ نتیجه می‌شود:

$$ {}^{xyz}I^{w} = \begin{bmatrix} \frac{J}{2} & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J}{2} \end{bmatrix} \qquad (۹۲-۲) $$

با استفاده از مقدار فوق نتیجه می‌شود:

$$ \tilde{\vec{M}}^{w} = -(I^{w}\vec{\alpha}^{w} + \vec{\omega}^{w} \times I^{w}\vec{\omega}^{w}) \qquad (۹۳-۲) $$

$$ \tilde{\vec{M}}^{w} = -J(-\frac{u_1u_2}{2r}\hat{i} + \frac{\dot{u}_1}{r}\hat{j} + \frac{\dot{u}_2}{2}\hat{k} - \frac{u_1u_2}{2r}\hat{i}) = -J(-\frac{u_1u_2}{r}\hat{i} + \frac{\dot{u}_1}{r}\hat{j} + \frac{\dot{u}_2}{2}\hat{k}) \qquad (۹۴-۲) $$

$$ \tilde{\vec{M}}^{wb} = -(I^{wb}\vec{\alpha}^{wb} + \vec{\omega}^{wb} \times I^{wb}\vec{\omega}^{wb}) = -(I\dot{u}_2\hat{k}) \qquad (۹۵-۲) $$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$ \vec{\omega}^{w}{}_1\tilde{\vec{M}}^{w} + \vec{\omega}^{wb}{}_1\tilde{\vec{M}}^{wb} = -(J\frac{\dot{u}_1}{r^2}) \qquad (۹۶-۲) $$

$$ \vec{\omega}^{w}{}_2\tilde{\vec{M}}^{w} + \vec{\omega}^{wb}{}_2\tilde{\vec{M}}^{wb} = -(I\dot{u}_2 + J\frac{\dot{u}_2}{2}) \qquad (۹۷-۲) $$

همچنین برای نیروهای تعمیم‌یافته اینرسی نظیر مومنتوم خطی:

$$ \vec{v}_1{}^{w}.(-m_w\vec{a}^{w}) + \vec{v}_1{}^{wb}.(-m_{wb}\vec{a}^{wb}) = -((m_w + m_{wb})\dot{u}_2) \qquad (۹۸-۲) $$

$$ \vec{v}_2{}^{w}.(-m_w\vec{a}^{w}) + \vec{v}_2{}^{wb}.(-m_{wb}\vec{a}^{wb}) = -(-lm_{wb}(u_1u_2 - l\dot{u}_2)) \qquad (۹۹-۲) $$

با جمع کردن عناصر متناظر در ۴ معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$ F_1{}^{*} = -((m_w + m_{wb})\dot{u}_2 + J\frac{\dot{u}_1}{r^2} + m_{wb}lu_2{}^2) \qquad (۱۰۰-۲) $$

$$ F_2{}^{*} = -((I + \frac{J}{2} + m_{wb}l^2)\dot{u}_2 - lm_{wb}u_1u_2) \qquad (۱۰۱-۲) $$

در مرحله بعد باید نیروهای تعمیم‌یافته را محاسبه کرد. با توجه به شرط عدم لغزش و حرکت در صفحه افقی تنها نیروی موثر نیرویی است که به دسته گاری وارد می‌شود و البته در این میان فقط مولفه افقی آن وارد معادلات می‌شود (البته به خاطر دوران چرخ حول دو محور، نیاز به گشتاوری است که توسط مولفه‌های عمودی نیروی دسته باید وارد شود):

$$ \vec{R}^{B} = \vec{R}^{A} = R(\cos(\beta)\hat{i} + \sin(\beta)\hat{j}) \qquad (۱۰۲-۲) $$

برای محاسبه اثر این نیروها ابتدا باید سرعت محل اثر آنها را محاسبه کرد:

$$ \vec{v}^{A} = \vec{v}^{C} + \vec{\omega}^{wb} \times \vec{r}^{A/C} = (v - q\dot{\theta})\hat{i} - p\dot{\theta}\hat{j} = (u_1 - qu_2)\hat{i} - pu_2\hat{j} \qquad (۱۰۳-۲) $$

$$ \vec{v}^{B} = \vec{v}^{C} + \vec{\omega}^{wb} \times \vec{r}^{B/C} = (v + q\dot{\theta})\hat{i} - p\dot{\theta}\hat{j} = (u_1 + qu_2)\hat{i} - pu_2\hat{j} \qquad (۱۰۴-۲) $$

سرعتهای جزیی برابرند با:

$$\vec{v}_1{}^A = \hat{i} \qquad (۲-۱۰۵)$$
$$\vec{v}_2{}^A = -q\hat{i} - p\hat{j} \qquad (۲-۱۰۶)$$

$$\vec{v}_1{}^B = \hat{i} \qquad (۲-۱۰۷)$$
$$\vec{v}_2{}^B = q\hat{i} - p\hat{j} \qquad (۲-۱۰۸)$$

و نهایتا نیروهای تعمیم‌یافته برابر خواهند شد با:

$$F_1 = \vec{v}_1{}^A.\vec{R}^A + \vec{v}_1{}^B.\vec{R}^B = 2R\cos(\beta) \qquad (۲-۱۰۹)$$
$$F_2 = \vec{v}_2{}^A.\vec{R}^A + \vec{v}_2{}^B.\vec{R}^B = -2pR\sin(\beta) \qquad (۲-۱۱۰)$$

بنابراین نهایتا معادلات حرکت به فرم زیرنتیجه می‌شوند:

$$r=1: \quad (m_w + m_{wb})\dot{u}_2 + J\frac{\dot{u}_1}{r^2} + m_{wb}lu_2{}^2 = 2R\cos(\beta) \qquad (۲-۱۱۱)$$
$$r=2: \quad (I + \frac{J}{2} + m_{wb}l^2)\dot{u}_2 - lm_{wb}u_1u_2 = -2pR\sin(\beta) \qquad (۲-۱۱۲)$$

معادلات فوق که نسبتا ساده هم می‌باشند به هیچ وجه با روش لاگرانژ قابل استحصال نیستند و باید توجه داشت که روش لاگرانژ به خاطر حضور ۲ قید nonholomonic، حتما ۴ معادله شتابگیری خواهد داشت که در این میان ۲ کمیت نیروی قیدی هم وارد معادلات خواهند شد و محاسبات حل عددی بسیار پرهزینه‌تر خواهد بود. اگرچه شاید معادلات حرکت در روش لاگرانژ با تعداد عملیات کمتری قابل محاسبه باشند ولیکن اگر حل عددی آن معادلات هم مطلوب باشد در آن صورت باید از معادلات قیدی سرعت مشتق گرفت که نهایتا حجم عملیات فرمولاسیون اولیه دو روش تقریبا مساوی خواهد شد اما حل عددی روش کین به مراتب آسانتر خواهد بود.

از جهت دیگر این مثال برگرفته از مثالی در مرجع (گینسبرگ) صفحات ۳۶۱-۳۶۴ می‌باشد که در آنجا این مثال به روش گیبزاپل حل می‌شود و دقیقا معادلات به همین فرم حاصل می‌شود. خوانندگانی که با روش فوق آشنایی دارند می‌توانند مشابهت ذاتی دو روش گیبزاپل و کین را در این مثال مورد بررسی قرار بدهند.

نکته قابل توجه دیگر در این مثال این است که اگر چه برخلاف مثال قبلی‌اش قیدهای حاکمه nonholomonic بودند، اما روش کین در برخورد با هر دو نوع قید holomonic یا nonholomonic قادر

به استخراج تعداد معادلاتی دقیقا برابر تعداد درجات آزادی است. اما روشهایی مثل روش لاگرانژ اگر فقط قیدها holomonic باشند قادر به اینکار هستند و البته در برخورد با هندسه‌های پیچده (مانند مثال دوم) این قابلیت آنها به سختی پاسخگو است.

مثال چهارم: محاسبه نیروهای قیدی

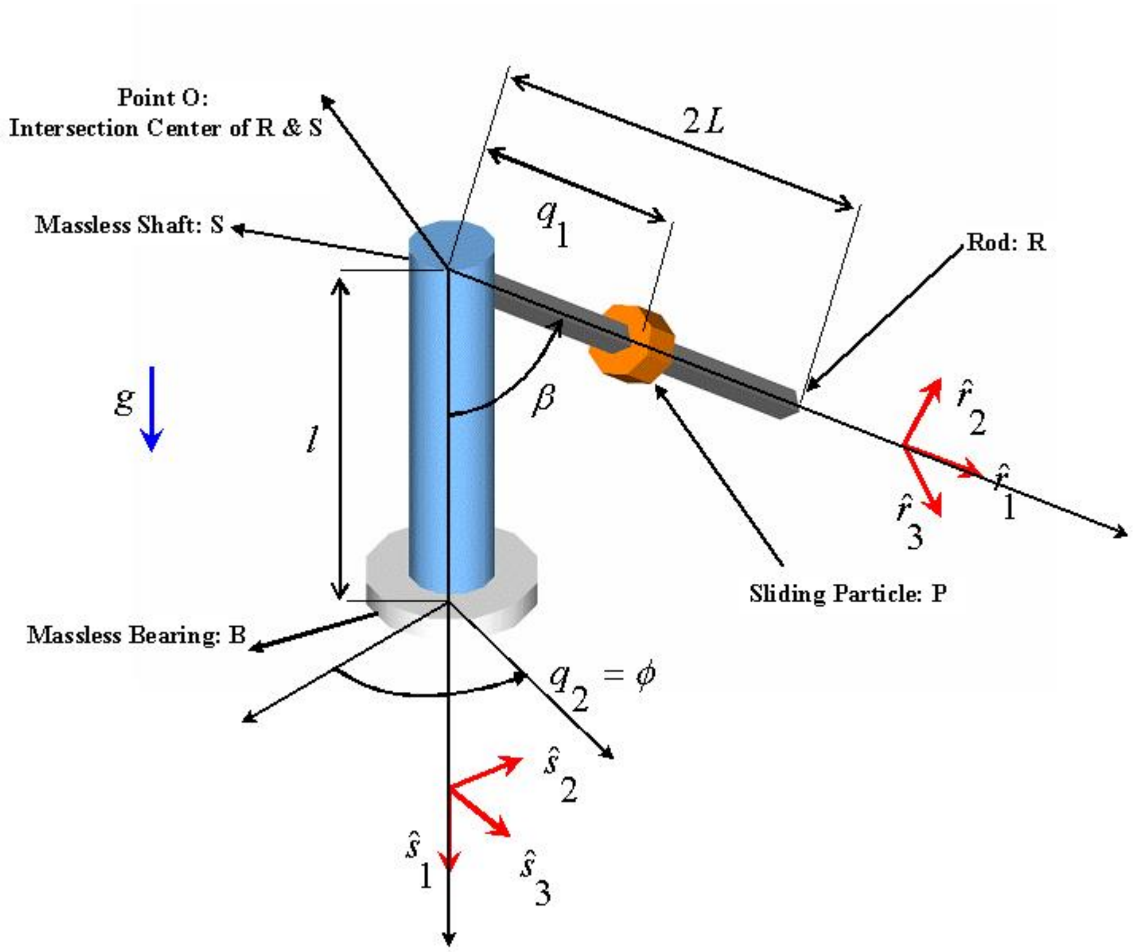
سیستم مورد بررسی مطابق شکل (۲ – ۴) از میله‌ای نازک به طول 2L و جرم m_R، و جرم لغزنده‌ای با جرم m_P، تشکیل شده است که بدون اصطکاک روی آن می‌لغزد. میله مورد بررسی به محور ثابت S وصل می‌باشد و این محور روی یاتاقان بدون اصطکاک B می‌لغزد. به این محور بدون جرم از خارج سیستم گشتاور محرک T (در جهت محور s_1) وارد می‌شود که عامل حرکت آن می‌باشد. مطلوب است:

الف: معادلات حرکت دو جرم مذکور.

ب: اگر مطابق شکل از دستگاه متعامد راستگرد مختصات (r_1,r_2,r_3) و (s_1,s_2,s_3) استفاده شود مطلوب است نیروهای قیدی زیر:

- مولفه r_3 نیروی تماسی میله و جرم لغزنده.
- مولفه s_2 گشتاور اتصال میله و محور S در نقطه تماس.
- مولفه s_1 نیروی تماسی محور S و یاتاقان B.

مطابق تعریف محور s_1 همواره در راستای محور S می‌باشد و محور s_2 نیز همواره در صفحه‌ای که از محور S و میله R تشکیل می‌شود قرار دارد. همچنین محور r_1 همواره در راستای میله R می‌باشد و محور r_2 نیز همواره در صفحه‌ای که از محور S و میله R تشکیل می‌شود قرار دارد.



شکل (۲ - ٤): شکل مثال چهارم، محاسبه نیروهای قیدی.

حل:

واضح است که سیستم مورد بررسی تنها دو درجه آزادی دارد و بنابراین برای استخراج معادلات حاکم بر آن کافی است که دو مختصه تعمیم‌یافته مطابق شکل (۲ – ۴) تعریف شوند. مختصه q_1 محل جرم لغزنده را روی میله مشخص می‌کند و مختصه q_2 چرخش محور S را مشخص می‌کند، البته مختصه q_2 صریحا در معادلات وارد نخواهد شد.

ابتدا بخش الف مساله حل خواهد شد تا معادلات اصلی شتابگیری استخراج شود و بنابراین دو سرعت تعمیم‌یافته مورد نیاز بدین ترتیب تعریف می‌شوند:

$$u_1 = \dot{q}_1 \qquad (۲ - ۱۱۳)$$
$$u_2 = \dot{q}_2 = \vec{\omega}^R . \hat{s}_1 \qquad (۲ - ۱۱۴)$$

سرعتهای مرکز اجرام بدین ترتیب قابل محاسبه‌اند:

$$\vec{\omega}^R = u_2\hat{s}_1 \qquad (۲ - ۱۱۵)$$

$$\vec{v}^R = \vec{\omega}^R \times (L\hat{r}_1) = L\sin(\beta)u_2\hat{r}_3 \qquad (۲ - ۱۱۶)$$

$$\vec{v}^P = \dot{q}_1\hat{r}_1 + \vec{\omega}^R \times (q_1\hat{r}_1) = u_1\hat{r}_1 + q_1\sin(\beta)u_2\hat{r}_3 \qquad (۲ - ۱۱۷)$$

بنابراین سرعتهای جزیی این اجسام برابرند با:

$$\vec{v}_1{}^R = 0 \qquad (۲ - ۱۱۸)$$

$$\vec{v}_2{}^R = L\sin(\beta)\hat{r}_3 \qquad (۲ - ۱۱۹)$$

$$\vec{\omega}_1{}^R = 0 \qquad (۲ - ۱۲۰)$$

$$\vec{\omega}_2{}^R = \hat{s}_1 = (\cos(\beta)\hat{r}_1 - \sin(\beta)\hat{r}_2) \qquad (۲ - ۱۲۱)$$

$$\vec{v}_1{}^P = \hat{r}_1 \qquad (۲ - ۱۲۲)$$

$$\vec{v}_2{}^P = q_1\sin(\beta)\hat{r}_3 \qquad (۲ - ۱۲۳)$$

از طرفی شتاب اجسام برابرند با:

$$\vec{a}^R = L\sin(\beta)\dot{u}_2\hat{r}_3 + \vec{\omega}^R \times (v^R) = L\sin(\beta)(\dot{u}_2\hat{r}_3 - u_2{}^2\hat{s}_3) \qquad (۲ - ۱۲۴)$$

$$\vec{a}^P = \dot{u}_1\hat{r}_1 + \sin(\beta)(u_1u_2 + q_1\dot{u}_2)\hat{r}_3 + \vec{\omega}^R \times v^P \qquad (۲ - ۱۲۵)$$

$$\vec{a}^P = \dot{u}_1\hat{r}_1 + \sin(\beta)((2u_1u_2 + q_1\dot{u}_2)\hat{r}_3 - u_2{}^2q_1\hat{s}_2) \qquad (۲ - ۱۲۶)$$

برای محاسبات اثرات دورانی میله R، نرخهای زاویه‌ای آن باید در دستگاه محورهای اصلی بیان

شوند برای اینکار:

$$\vec{\omega}^R = u_2\hat{s}_1 = u_2(\cos(\beta)\hat{r}_1 - \sin(\beta)\hat{r}_2) \qquad (۲ - ۱۲۷)$$

$$\vec{\alpha}^R = \dot{u}_2\hat{s}_1 = \dot{u}_2(\cos(\beta)\hat{r}_1 - \sin(\beta)\hat{r}_2) \qquad (۲ - ۱۲۸)$$

$$^{(r_1,r_2,r_3)}I^R = \frac{m_R L^2}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲ - ۱۲۹)$$

با استفاده از مقدار فوق نتیجه می‌شود:

$$\tilde{\vec{M}}^R = -(I^R\vec{\alpha}^R + \vec{\omega}^R \times I^R\vec{\omega}^R) = -\frac{m_R L^2}{3}\sin(\beta)(-\dot{u}_2\hat{r}_2 - u_2{}^2\cos(\beta)\hat{r}_3) \qquad (۲ - ۱۳۰)$$

بنابراین نیروی اینرسی تعمیم‌یافته مربوط به جابجایی مراکز جرمها برابر خواهد بود با:

$$\vec{v}_1{}^P.(-m_P\vec{a}^P)+\vec{v}_1{}^R.(-m_R\vec{a}^R)=-m_P(\dot{u}_1-\sin^2(\beta)u_2{}^2q_1) \quad (۱۳۱ - ۲)$$
$$\vec{v}_2{}^P.(-m_P\vec{a}^P)+\vec{v}_2{}^R.(-m_R\vec{a}^R)=-\sin^2(\beta)((m_Pq_1{}^2+m_RL^2)\dot{u}_2+2m_Pq_1u_1u_2) \quad (۱۳۲ - ۲)$$

و نیروی اینرسی تعمیم‌یافته مربوط به دوران جرم غیر متمرکز R برابر خواهد بود با:

$$\vec{\omega}^R{}_1\tilde{\vec{M}}^R=0 \quad (۱۳۳ - ۲)$$
$$\vec{\omega}^R{}_2\tilde{\vec{M}}^R=-\frac{m_RL^2}{3}\sin^2(\beta)\dot{u}_2 \quad (۱۳۴ - ۲)$$

با جمع کردن اثرات چهار عبارت فوق مجموع نیروهای اینرسی تعمیم‌یافته برابر خواهد بود با:

$$F_1{}^*=-m_P(\dot{u}_1-\sin^2(\beta)u_2{}^2q_1) \quad (۱۳۵ - ۲)$$
$$F_2{}^*=-\sin^2(\beta)((m_Pq_1{}^2+\frac{4m_RL^2}{3})\dot{u}_2+2m_Pq_1u_1u_2) \quad (۱۳۶ - ۲)$$

در مرحله بعد باید نیروهای تعمیم‌یافته نظیر نیروهای موثر را حساب کرد. تنها نیروهای موثر در حرکت گشتاور خارجی T و نیروی وزن جرم لغزنده می‌باشد. برای گشتاور وارد شده:

$$\vec{M}^T=T\hat{s}_1 \quad (۱۳۷ - ۲)$$
$$\vec{\omega}^T=\dot{q}_2\hat{s}_1=u_2\hat{s}_1 \quad (۱۳۸ - ۲)$$

$$\vec{\omega}_1{}^T=0 \quad (۱۳۹ - ۲)$$
$$\vec{\omega}_2{}^T=\hat{s}_1 \quad (۱۴۰ - ۲)$$

محل اعمال وزن همان مرکز جرم و همان سرعتهای جزیی را دارد:

$$\vec{R}^{W-P}=m_pg\hat{s}_1 \quad (۱۴۱ - ۲)$$

و نهایتا نیروهای تعمیم‌یافته برابر خواهند بود با:

$$F_1=\vec{\omega}_1{}^T.\vec{M}^T+\vec{v}_1{}^p.\vec{R}^{W-P}=m_pg\cos(\beta) \quad (۱۴۲ - ۲)$$
$$F_2=\vec{\omega}_2{}^T.\vec{M}^T+\vec{v}_2{}^p.\vec{R}^{W-P}=T \quad (۱۴۳ - ۲)$$

بنابراین پاسخ بخش الف مثال یا معادلات حرکت بدین قرار خواهد بود:

$$r=1:\ (\dot{u}_1-\sin^2(\beta)u_2{}^2q_1)=g\cos(\beta) \quad (۱۴۴ - ۲)$$
$$r=2:\ \sin^2(\beta)((m_Pq_1{}^2+\frac{4m_RL^2}{3})\dot{u}_2+2m_Pq_1u_1u_2)=T \quad (۱۴۵ - ۲)$$

در مرحله بعد باید نیروهای قیدی را محاسبه کرد. منظور از نیروهای داخلی یا قیدی طبق تعریف نیروهایی است که در معادلات نیروهای تعمیم‌یافته ظاهر نمی‌شوند و به عبارت دیگر در انرژی

سیستم وارد نمی‌شوند. به طور مثال نیروهای قیدی داخلی جابجایی نسبی‌اشان بین محل اعمال عمل و عکس‌العملشان صفر است و یا اینکه عمود بر راستای خودشان است.

برای آن که بتوان این نیروها را حساب کرد باید فرض کرد که به طور مجازی (زیرا چنین کاری قیدهای حاکم بر حرکت را نقض می‌کند) جابجایی نسبی غیر صفری در راستای آنها روی می‌دهد و سپس معادله حرکت نظیر آن جابجایی را حساب کرد. در چنین معادله‌ای آن نیروها به همراه دیگر نیروهای موثر و نرخهای مختصه‌های حقیقی و مجازی سیستم ظاهر می‌شود. پس از استخراج معادلات سرعتها و شتابهای (نرخ سرعتهای تعمیم‌یافته) مربوط به مختصه‌های مجازی را باید صفر گذاشت و در نتیجه نیروهای قیدی که در این معادلات ظاهر شده‌اند بر حسب مقادیر مختصه‌های حقیقی و نیروهای موثر محاسبه می‌شوند. از آنجا که شتابهای مختصه‌ها طبق معادلات خطی شتابگیری خود تابعی از نیروهای موثر، موقعیت (مختصه‌های تعمیم‌یافته)، سرعتها (سرعتهای تعمیم‌یافته) و زمان هستند، نیروهای قیدی را نیز می‌توان بر حسب تابعی از نیروهای موثر، موقعیت، سرعتها و زمان محاسبه کرد.

در روش کین می‌توان پروسه فوق را (که برای تمامی روشهای دینامیکی حساب تغییراتی قابل اعمال است) کمی ساده‌تر کرد. از آنجا که در روش کین نوعا معادلات تعادل (با احتساب نیروی اینرسی به عنوان یک نیروی خارجی) از روش جابجایی مجازی (Virtual Displacement) حل می‌شوند (برای اینکار مولفه‌های جابجایی نوعا از روی سرعت جزیی‌ها محاسبه می‌شوند) کافی است که فقط نظیر جابجایی‌های مجازی یک سرعت تعمیم‌یافته تعریف شود و سرعت‌جزیی‌های نظیر آن در محل اعمال نیروها محاسبه شوند. در طی این روش نیاز به تعریف مختصات تعمیم‌یافته اضافی نیست و اثر این سرعتهای مجازی در نیروهای اینرسی وارد نخواهدشد. حل بخش ب مثال، که در ادامه می‌آید، روش مورد استفاده را روشنتر خواهد ساخت.

ابتدا نیروهای قیدی حرکت را نام گذاری می‌کنیم. سه تماس (B,S)، (S,R) و (R,P) وجود دارد. در هر تماس نیروهای R و گشتاورهای M انتقال پیدا خواهد کرد. طبق قرارداد فرض می‌شود نماد

$Body_1 \to Body_2$ نشانگر این است که جهت نیرو (گشتاور) وارده نظیر اثر $Body_1$ به $Body_2$ می‌باشد. همچنین نماد ${}^{Body_1}X^{Body_2}$ نشانگر مقدار نسبی کمیت X جسم $Body_2$ به کمیت X جسم $Body_1$ می‌باشد.

نقطه ای بودن جرم P نتیجه می‌دهد:

$$\vec{M}^{R\to P} = 0 \tag{۲ - ۱۴۶}$$

همچنین با فرض عدم وجود اصطکاک نیروهای قیدی به قرار زیر خواهند بود:

$$\vec{R}^{R\to P} = R_2^{R\to P}\hat{r}_2 + R_3^{R\to P}\hat{r}_3 \tag{۲ - ۱۴۷}$$

$$\vec{M}^{B\to S} = M_2^{B\to S}\hat{s}_2 + M_3^{B\to S}\hat{s}_3 \tag{۲ - ۱۴۸}$$

همچنین برای تماس در نقطه O، اگر فرض شود:

$$\vec{R}^{S\to R} = R_1^{S\to R}\hat{s}_1 + R_2^{S\to R}\hat{s}_2 + R_3^{S\to R}\hat{s}_3 \tag{۲ - ۱۴۹}$$

با توجه به بدون جرم فرض کردن محور S نتیجه می‌شود:

$$\vec{R}^{B\to S} = \vec{R}^{S\to R} = R_1^{B\to S}\hat{s}_1 + R_2^{B\to S}\hat{s}_2 + R_3^{B\to S}\hat{s} \tag{۲ - ۱۵۰}$$

$$\vec{M}^{S\to R} = T\hat{s}_1 + \vec{M}^{B\to S} + \vec{r}^{OB}\times\vec{R}^{B\to S} = T\hat{s}_1 + M_2^{S\to R}\hat{s}_1 + M_3^{S\to R}\hat{s}_1 \tag{۲ - ۱۵۱}$$

- $\vec{r}^{OB}$: بردار واصل نقطه O به مرکز یاتاقان B و برابر با:

$$\vec{r}^{OB} = l\hat{s}_1 \tag{۲ - ۱۵۲}$$

در نتیجه از رابطه (۲ – ۱۵۱) نتیجه می‌شود:

$$M_2^{S\to R} = M_2^{B\to S} - lR_3^{B\to S} = M_2^{B\to S} - lR_3^{S\to R} \tag{۲ - ۱۵۳}$$

$$M_3^{S\to R} = M_3^{B\to S} + lR_2^{B\to S} = M_3^{B\to S} + lR_2^{S\to R} \tag{۲ - ۱۵۴}$$

بنابراین با معلوم بودن مقادیر ۷ مجهول معادلات (۲ – ۱۴۷) تا (۲ – ۱۴۹) تمام نیروهای قیدی مشخص خواهد شد. با توجه به خواسته‌های مساله از میان این مجهولها مقادیر $M_2^{S\to R}, R_3^{R\to P}, R_1^{B\to S} = R_1^{S\to R}$ باید محاسبه شود. نظیر این سه نیرو ۳ سرعت تعمیم‌یافته اضافی تعریف می‌شود.

برای محاسبه $R_1^{B\to S}$ فرض می‌شود که شافت S یک سرعت عمودی داشته باشد:

$$\vec{v}^S = \vec{v}^B + u_3\hat{s}_1 = u_3\hat{s}_1 = \vec{v}^0 \tag{۲ - ۱۵۵}$$

همچنین برای محاسبه $M_2^{S\to R}$ فرض می‌شود که میله R یک سرعت دورانی اضافی نسبت به محور S در راستای s_2 داشته باشد:

$$\vec{\omega}^R = \vec{\omega}^S + u_4\hat{s}_2 = u_2\hat{s}_1 + u_4\hat{s}_2 \tag{۲ - ۱۵۶}$$

و نهایتا برای محاسبه $R_3^{R\to P}$ فرض می‌شود که ذره P یک سرعت خطی اضافی نسبت به میله R در راستای r_3 داشته باشد:

$$ {}^{P_R}\vec{v}^{P} = u_1\hat{r}_1 + u_5\hat{r}_3 \qquad (۲ - ۱۵۷) $$

- P_R: نقطه‌ای از میله R که با P تماس دارد (نقطه متناظر P روی میله R).
- ${}^{P_R}\vec{v}^{P}$: سرعت نسبی ذره P نسبت به P_R (سرعت نسبی نقطه P روی جسم P با جسم R).

پس از تعریف سرعتهای تعمیم‌یافته اضافی باید سرعتهای محل اثر نیروهای فعال، اینرسی و قیدی مطلوب با در نظرگرفتن سرعتهای تعمیم‌یافته اضافی تعریف‌شده مجددا محاسبه شود. برای میله R خواهیم داشت:

$$ \vec{v}^{R} = \vec{v}^{S} + \vec{\omega}^{R}\times(L\hat{r}_1) = u_3\hat{s}_1 + L(\sin(\beta)u_2 - \cos(\beta)u_4)\hat{r}_3 \qquad (۲ - ۱۵۸) $$

برای جسم لغزنده:

$$ \vec{v}^{P_R} = \vec{v}^{S} + \vec{\omega}^{R}\times(q_1\hat{r}_1) = u_3\hat{s}_1 + q_1(\sin(\beta)u_2 - \cos(\beta)u_4)\hat{r}_3 \qquad (۲ - ۱۵۹) $$

$$ \vec{v}^{P} = \vec{v}^{P_R} + {}^{P_R}\vec{v}^{P} = u_3\hat{s}_1 + u_1\hat{r}_1 + (q_1(\sin(\beta)u_2 - \cos(\beta)u_4) + u_5)\hat{r}_3 \qquad (۲ - ۱۶۰) $$

حال باید سرعتهای جزیی را محاسبه کرد. خلاصه نتایج در جدول (۲ – ۱) آمده است:

جدول (۲ - ۱): محاسبه سرعتهای جزیی مورد نیاز برای حل مثال چهارم.

نیروهای متناظر	سرعت مورد بررسی	r=3	r=4	R=5
$\vec{M}^{T}$	$\vec{w}_r^{\,S}$	0	0	0
$\vec{R}^{B\to S}$	$\vec{v}_r^{\,S}$	$\hat{s}_1$	0	0
$\vec{M}^{S\to R}$	${}^{S}\vec{w}_r^{\,R}$	0	$\hat{s}_2$	0
$\tilde{\vec{M}}^{R}$	$\vec{w}_r^{\,R}$	0	$\hat{s}_2$	0
$\tilde{\vec{R}}^{R},\ \vec{R}^{W-R}$	$\vec{v}_r^{\,R}$	$\hat{s}_1$	$-L\cos(\beta)\hat{r}_3$	0
$\vec{R}^{R\to P}$	${}^{P_R}\vec{v}_r^{\,P}$	0	0	$\hat{r}_3$
$\tilde{\vec{R}}^{P},\ \vec{R}^{W-P}$	$\vec{v}_r^{\,P}$	$\hat{s}_1$	$-q_1\cos(\beta)\hat{r}_3$	$\hat{r}_3$

از طرفی به خاطر سرعتهای اضافی فرض شده نیروی وزن میله R هم نیروی موثر خواهد شد و باید وارد معادلات شود:

$$\vec{R}^{W-R} = m_R g \hat{s}_1 \qquad (۲ - ۱۶۱)$$

با معلوم بودن تمام سرعتهای جزیی مورد نیاز می‌توان نیرویهای تعمیم‌یافته را بدین قرار محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} F_r &= \vec{v}_r^{\,R}.(m_R g\hat{s}_1) + \vec{w}_r^{\,S}.(T\hat{s}_1) \\ &\quad \vec{v}_r^{\,P}.(m_P g\hat{s}_1) + \vec{v}_r^{\,S}.(R_1^{B\to S}\hat{s}_1) +^{S}\ \vec{w}_r^{\,R}.(M_2^{S\to R}\hat{s}_2) +^{P_R}\ \vec{v}_r^{\,P}.(R_3^{R\to P}\hat{r}_3) \end{aligned} \qquad (۲ - ۱۶۲)$$

با جاگذاری مقادیرسرعت جزیی در رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$F_3 = R_1^{B\to S} + g(m_P + m_R) \qquad (۲ - ۱۶۳)$$

$$F_4 = M_2^{S\to R} \qquad (۲ - ۱۶۴)$$

$$F_5 = R_3^{R\to P} \qquad (۲ - ۱۶۵)$$

مقادیر نیروهای تعمیم‌یافته اینرسی نیز برابرند با:

$$F^*{}_r = \vec{v}_r^{P}.\tilde{\vec{R}}^{P} + \vec{v}_r^{R}.\tilde{\vec{R}}^{R} + \vec{\omega}_r^{R}.\tilde{\vec{M}}^{R} \qquad (۲ - ۱۶۶)$$

با جاگذاری مقادیرسرعت جزیی در رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$F_3^* = -m_P\cos(\beta)\dot{u}_1 \qquad (۲ - ۱۶۷)$$

$$F_4^* = \sin(\beta)\cos(\beta)((m_P q_1^{\,2} + \frac{4m_R L^2}{3})\dot{u}_2 + 2m_P q_1 u_1 u_2) \qquad (۲ - ۱۶۸)$$

$$F_5^* = -m_P\sin(\beta)(q_1\dot{u}_2 + 2u_1u_2) \qquad (۲ - ۱۶۹)$$

با جاگذاری این روابط و ۳ رابطه نیرویهای تعمیم‌یافته در معادله کین می‌توان نیروهای قیدی را بدین قرار محاسبه کرد:

$$R_1^{B\to S} = R_1^{S\to R} = -g(m_P + m_R) + m_P\cos(\beta)\dot{u}_1 \qquad (۲ - ۱۷۰)$$

$$M_2^{S\to R} = -\sin(\beta)\cos(\beta)((m_P q_1^{\,2} + \frac{4m_R L^2}{3})\dot{u}_2 + 2m_P q_1 u_1 u_2) \qquad (۲ - ۱۷۱)$$

$$R_3^{R\to P} = m_P\sin(\beta)(q_1\dot{u}_2 + 2u_1u_2) \qquad (۲ - ۱۷۲)$$

همانطور که قبلا گفته شد، در صورت نیاز می‌توان با استفاده از معادلات شتابگیری (که نسبت به $\dot{u}_r$ خطی هستند) در روابط فوق $\dot{u}_r$ را حذف کرد.

اگر چه در این مرحله مثال تماما حل شده است ولی برای تکمیل بحث روش محاسبه بقیه نیروهای قیدی نیز ذکر خواهد شد. کافی است به ازا مولفه‌های باقیمانده مجددا تعدادی سرعت

تعمیم‌یافته تعریف شود. برای ۴ مولفه مجهول $M_3^{S\to R}, R_2^{R\to P}, R_2^{B\to S}, R_3^{B\to S}$ ۴ سرعت اضافی تعمیم‌یافته دیگر بدین قرار تعریف می‌شوند:

$$^{B}\vec{v}^{S} = \vec{v}^{S} = \vec{v}^{0} = u_3\hat{s}_1 + u_6\hat{s}_2 + u_7\hat{s}_3 \qquad (۲ - ۱۷۳)$$

$$^{S}\vec{\omega}^{R} = u_4\hat{s}_2 + u_8\hat{s}_3 \Rightarrow \vec{\omega}^{R} = u_2\hat{s}_1 + u_4\hat{s} + u_8\hat{s}_3 \qquad (۲ - ۱۷۴)$$

$$^{P_R}\vec{v}^{P} = u_1\hat{r}_1 + u_9\hat{r}_2 + u_5\hat{r}_3 \qquad (۲ - ۱۷۵)$$

پس از محاسبه سرعتهای اجزا با در نظر گرفتن سرعتهای اضافه‌شده باید سرعتهای جزیی را مجددا حساب کرد و در این حالت کلیتر می‌توان نیروهای تعمیم‌یافته را بدین ترتیب محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} F_r &= \vec{v}_r^{\,R}.(m_R g\hat{s}_1) + \vec{w}_r^{\,S}.(T\hat{s}_1) \\ &\vec{v}_r^{\,P}.(m_P g\hat{s}_1) + \vec{v}_r^{\,S}.(\vec{R}^{B\to S}) + {}^{S}\,\vec{w}_r^{\,R}.(\vec{M}^{S\to R}) + {}^{P_R}\,\vec{v}_r^{\,P}.(\vec{R}^{R\to P}) \end{aligned} \qquad (۲ - ۱۷۶)$$

با جاگذاری مقادیر سرعتهای جزیی در رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$F_6 = R_2^{B\to S} \qquad (۲ - ۱۷۷)$$

$$F_7 = R_3^{B\to S} \qquad (۲ - ۱۷۸)$$

$$F_8 = M_2^{S\to R} - g(m_P q_1 + m_R L)\sin(\beta) \qquad (۲ - ۱۷۹)$$

$$F_9 = R_2^{R\to P} - g m_P \sin(\beta) \qquad (۲ - ۱۸۰)$$

نیروهای تعمیم‌یافته اینرسی از همان رابطه (۲ — ۱۶۶)محاسبه می‌شوند و می‌توان آنها را مجددا محاسبه کرد. به طور مثال:

$$F_9^{*} = -m_P \sin(\beta)(\dot{u}_2 q_1 + 2u_1u_2) \qquad (۲ - ۱۸۱)$$

نهایتا می‌توان نیروهای قیدی را از رابطه کین محاسبه کرد. به طور مثال با استفاده از دو رابطه قبلی نتیجه می‌شود:

$$R_2^{R\to P} = m_P \sin(\beta)(g + \dot{u}_2 q_1 + 2u_1u_2) \qquad (۲ - ۱۸۲)$$

بنابراین کلیه نیروهای قیدی قابل محاسبه هستند. در جمع بندی این مثال می‌توان گفت که با روش کین به سادگی می‌توان با اضافه کردن تعدادی سرعت تعمیم‌یافته مجازی نیروهای قیدی را محاسبه کرد. برای این کار بر خلاف روش لاگرانژ نیازی به اضافه کردن مختصات تعمیم‌یافته اضافی و حل همزمان معادلات حاصله از آنها با معادلات قیدی نظیرشان نیست. در نتیجه می‌توان گفت که روش کین از جهت محاسبه نیروهای داخلی کاراتر است.

البته به طور کلی سعی می‌شود که از روشهایی مثل لاگرانژ یا کین ابتدا شتابها محاسبه شوند و سپس با معلوم شدن نیروهای اینرسی از معادلات تعادل نیروهای قیدی محاسبه شود. روش کین به این دیدگاه نزدیکتر است و به همین دلیل محاسبه نیروهای قیدی با آن ساده‌تر است. اما یک فرق اساسی بین روش معادلات تعادل عادی و روش کین در محاسبه نیروهای قیدی وجود دارد. در روش کین با اسلوب خاصی، که محاسبه سرعتهای جزیی می‌باشد، می‌توان یک نیروی قیدی خاص را مجزا از دیگر نیروهای قیدی محاسبه کرد. اما در روش حل معادلات تعادل معمولا باید دستگاهی متشکل از تعدادی نیروهای قیدی را به طورکلی حل کرد، تا یک نیروی قیدی مورد نظر هم در آن میان محاسبه شود و مخصوصا اگر یک زنجیره بسته وجود داشته باشد اینکار بسیار پیچیده خواهد شد.