



(۱) به سوالات زیر با ذکر دلیل پاسخ دهید:

الف) در تعیین Correlation برای ضرایب تصحیح لغزش و ناهماهنگی، استفاده از نتایج آزمایشگاهی قابل اعتمادتر است یا نتایج حل عددی؟

ب) چرا اثر ضریب ناهماهنگی در دبی‌های کم پررنگ‌تر است؟

پ) ضرایب تصحیح هیچ ارتباطی با راندمان هیدرولیکی پمپ ندارند. (درست / نادرست)

ت) در فاز طراحی یک پمپ قلب شعاعی، با توجه به حساسیت کارکرد آن، برآورد دقیق ضریب ناهماهنگی از اهمیت بالایی برخوردار است. (درست / نادرست)

ث) در طراحی پمپ اشاره شده در قسمت قبل، برآورد ضریب لغزش به کمک رابطه استودلا توصیه نمی‌شود. (درست / نادرست)

ج) نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که جریان در سطح مکش پره به دلیل فشار کمتر نسبت به سطح فشاری آن، داری سرعت بالاتری است. (درست / نادرست)

حل مسئله:

۱- الف) ضرایب لغزش و ناهماهنگی ضرایبی هستند که تئوری یک بعدی (دو بعدی برای جریان غیرلزج مربوط می‌گردد). انجام یک حل جریان پتانسیل می‌تواند می‌دین سرعت و فشار را با دقت خوبی محاسبه کند. به کمک آن این ضرایب بدست می‌آیند. اما روش آزمونگاهی، به طرز ذاتی پروفیل‌های تاج جریان سیال لزج را نمی‌دهند که برای برآورد این ضرایب مناسب نیستند.

ب) در دبی‌های پایین به دلیل کم بودن عدد Re ، جریان به فرم جریان آرام با پروفیل سهمی نزدیک تر است ولی در جریان‌های بادی بالاتر Re زیاد است و جریان به جریان معشوش با پروفیل توانی شبیه می‌شود که غیر یکفواختی کمتری نسبت به جریان با پروفیل سهمی دارد. لذا خطای روش یک بعدی در دبی‌های پایین بیشتر و نیاز به ضریب ناهماهنگی پررنگ‌تر است.

پ) درست - راندمان هیدرولیک به اثرات لزجت ربط دارد در حالی که این ضریب برای جریان غیرلزج به کار می‌روند.

ت) نادرست - بر اساس رابطه $H''_{\infty} = \frac{V_2^2}{g} - \frac{V_2}{g} K C_{m2} \cos \beta'_2$ ، چون $\beta'_2 = 90^\circ$ است ،
 ترم دم صفر شده و K بی اهمیت است (توجه شود در فارطراحی از تئوری غیر لزج استفاده
 می شود)

ث) درست - رابطه استوای برای $20^\circ < \beta'_2 < 40^\circ$ مناسب است که برای این پیک با $\beta'_2 = 30^\circ$ توصیف
 نمی شود

ج) نادرست - آنچه این گزاره در مورد جریانی غیر لزج صیح است ، اما در واقعیت به دلیل پدیده جابجایی
 جریان از سطح کم فشار ، سرعت در این سمت کم تر می شود ← پدیده Jet / wake

۲) با در نظر گرفتن یک المان سیال بر روی یک خط جریان و همچنین انتخاب دستگاه مختصات مناسب، معادلات مومنوم دوبعدی حرکت سیال
 غیر لزج در داخل کانال بین دو پره بر روی یک چرخ پمپ را که با سرعت ω دوران می کند، در دو راستای مماسی و عمودی بر خطوط جریان
 به دست آورید.

راهنمایی: توجه داشته باشید که شتاب یک ذره در راستای مماسی و عمودی بر یک مسیر از رابطه

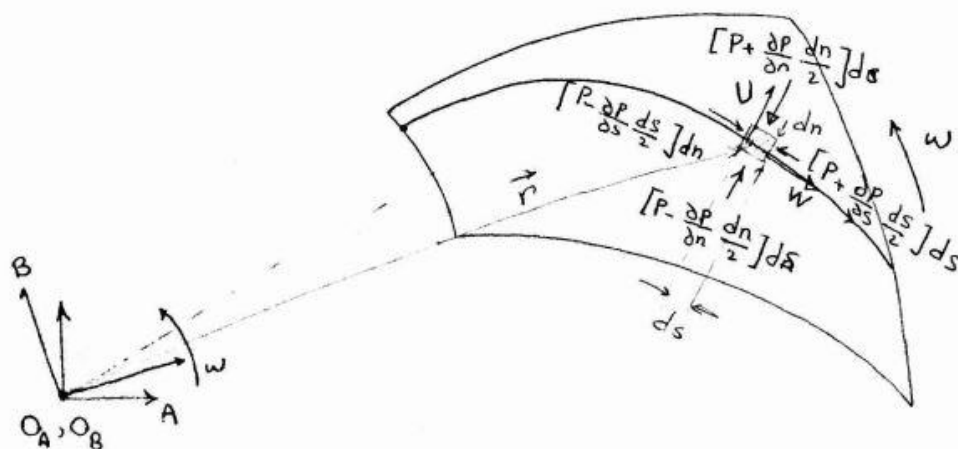
$$\vec{a} = \frac{DW}{Dt} \hat{e}_s - \frac{W^2}{R} \hat{e}_n$$

قابل محاسبه است که در آن $\hat{e}_s$ ، $\hat{e}_n$ ، W و R به ترتیب بردارهای یکه در راستای مماسی و عمودی بر منحنی، سرعت ذره در راستای
 مسیر و شعاع انحنای مسیر است. همچنین، شتاب مطلق (نسبت به دستگاه مرجع A) یک ذره P که در یک دستگاه متحرک B حرکت
 می کند، از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{B/A} + \vec{\omega}_{B/A} \times (\vec{\omega}_{B/A} \times \vec{r}_{P/B}) + \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{a}_{P/B} + 2\vec{\omega}_{B/A} \times \vec{v}_{P/B}$$

که در این عبارت بردارهای $\vec{r}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{\omega}$ به ترتیب بردارهای موقعیت، سرعت، و سرعت دورانی هستند.

حل مسئله:



در نگاه متغیبات (یکای) را در مرکز قرار می دهیم که با سرعت ω با چرخ می خورد.

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_s + \sum \vec{F}_n = -\frac{\partial P}{\partial s} \underbrace{ds dn}_{dV} \hat{e}_s + \frac{\partial P}{\partial n} ds dn \hat{e}_n = -dV \underbrace{\left[\frac{\partial P}{\partial s} \hat{e}_s + \frac{\partial P}{\partial n} \hat{e}_n \right]}_{\vec{\nabla} P}$$

$$\sum \vec{F} = dm \vec{a} = \rho dV \vec{a} = \rho dV \left[\vec{a}_{B/A} + \vec{\omega}_{B/A} \times (\vec{\omega}_{B/A} \times \vec{r}) + \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{r} + \vec{a}_{inB} + 2\vec{\omega}_{B/A} \times \vec{V}_{inB} \right]$$

دو دسته نسبت به هم هیچ شتابی ندارند

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_{B/A} = 0 \\ \vec{\omega}_{B/A} = 0 \end{array} \right. \leftarrow \text{شمار این}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = \rho dV \left[\underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{III}} + \underbrace{\vec{a}_{inB}}_{\text{I}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{V}_{inB}}_{\text{II}} \right]$$

دورباتی خود و خط جریان سرعت

$$\text{I: } \vec{a}_{inB} = \frac{Dw}{Dt} \hat{e}_s + \frac{w^2}{R} \hat{e}_n = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial s} + V_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) \hat{e}_s - \frac{w^2}{R} \hat{e}_n$$

$$= w \frac{\partial w}{\partial s} \hat{e}_s - \frac{w^2}{R} \hat{e}_n$$

$$\textcircled{\text{II}}: 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{inB} = 2(\omega \hat{k}) \times (W \hat{e}_s) = 2\omega W \hat{e}_n$$

(به راستای محور بر صفحه (درست به دور)

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{III}}: \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \left(\frac{r\omega}{r} \hat{k}\right) \times \left(\frac{r\omega}{r} \hat{k} \times r \hat{e}_r\right) = \left(\frac{U}{r} \hat{k}\right) \times \left(\frac{U}{r} \hat{k} \times r \hat{e}_r\right) \\ &= -U \left(\frac{U}{r} \hat{e}_r\right) = -U (\|\nabla U\| \hat{e}_r) = -U \left(\frac{\partial U}{\partial s} \hat{e}_s + \frac{\partial U}{\partial n} \hat{e}_n\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U^2}{2}\right) \hat{e}_s - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{U^2}{2}\right) \hat{e}_n \end{aligned}$$

توجه شود که گرادیان U تنها در مختصات r, θ تنها در راستای r متوجه دارد
اساس مختصات n, s در هر دو راستا

$$\textcircled{\text{I}} \Rightarrow \textcircled{\text{II}} \Rightarrow \textcircled{\text{III}} \Rightarrow -\rho \left[\frac{\partial p}{\partial s} \hat{e}_s + \frac{\partial p}{\partial n} \hat{e}_n \right] = \rho \left[W \frac{\partial W}{\partial s} \hat{e}_s + \frac{W^2}{R} \hat{e}_n + 2\omega W \hat{e}_n - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U^2}{2}\right) \hat{e}_s - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{U^2}{2}\right) \hat{e}_n \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s: \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2} \right) + W \frac{\partial W}{\partial s} = 0 \\ n: \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{U^2}{2} \right) - \frac{W^2}{R} + 2\omega W = 0 \end{cases}$$

(۳) پمپ سانتریفیوژی برای تامین هد استاتیکی ۲۰ متر در یک مدار مورد استفاده قرار می گیرد. تلفات اصطکاکی در مسیرهای مکش و تخلیه مدار پمپ به ترتیب ۴ و ۸ برابر هد دینامیکی جریان عبوری از آنهاست. هم چنین به دلیل اتصالات موجود در مدار، تلفاتی معادل ۱/۵ برابر هد دینامیکی جریان ایجاد می شود. قطر مسیر مکش و تخلیه برابر ۲۰ سانتی متر است. پمپ مذکور در سرعت دورانی ۱۶۰۰ دور بر دقیقه کار کرده و دارای چرخ با ۷ پره رو به عقب است. قطر داخلی و خارجی چرخ به ترتیب ۱۲/۵ و ۲۵ سانتی متر بوده و زاویه پره در خروجی ۳۰ درجه است. عرض پره برابر ۲/۵ سانتی متر بوده و جریان بدون پیش چرخش وارد چرخ می شود. با فرض اینکه میزان لغزش از رابطه بوزمان محاسبه شده و رابطه راندمان هیدرولیکی با میزان دبی پمپ در بازه $Q \in [0.01, 0.1] \frac{m^3}{s}$ بصورت $\eta = 0.7 + 10Q - 140Q^2$ و $\eta_h = 0.9\eta$ باشد، مطلوب است محاسبه:

(۱) دبی جریان (۲) هد اوپلری (۳) بازده هیدرولیکی و هد مفید (۴) انحراف زاویه ای (۵) توان ورودی پمپ

حل مسئله:

در مرحله اول با استفاده از اطلاعات مدار هد مفید تولیدی توسط پمپ می‌توان نوشت:

$$H = \underbrace{H_{\text{static}}}_{\text{هد استاتیکی سیال در مدار}} + \underbrace{\Delta H_{\text{suction}}}_{\text{تلفات مدار}} + \underbrace{\Delta H_{\text{discharge}}}_{\text{هد مفید تولیدی توسط پمپ}} + \underbrace{\Delta H_{\text{local}}}_{\text{هد مفید تولیدی توسط پمپ}}$$

$$\Rightarrow H = 20 + 4 \frac{C_s^2}{2g} + 8 \frac{C_d^2}{2g} + 1.5 \frac{C^2}{2g}, \quad C = C_s = C_d = \frac{Q}{A_{\text{suction}}} = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

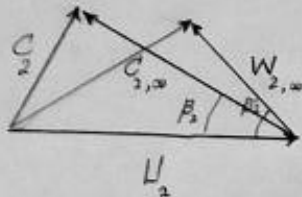
$$\Rightarrow C = \frac{4Q}{\pi \times 0.2^2} = 31.83 Q \Rightarrow H = 20 + \frac{13.5 C^2}{2g} = 20 + 697.16 Q^2$$

این میزان هد مفید تولیدی توسط پمپ

$$H'' = \frac{H}{\eta_H} = \frac{20 + 697.16 Q^2}{0.7 - 140 Q^2 + 10 Q} \quad \text{I}$$

با اعمال راندمان هیدرولیکی (η_H)، میزان هد مورد نیاز قابل کسب خواهد بود:

از طرف دیگر از روابط پمپ نیز میزان H'' قابل کسب است:



$$U_2 = \frac{\pi D_2 N}{60} = \frac{\pi \times 0.25 \times 1600}{60} = 20.94 \text{ m/s}$$

$$C_{m,2} = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2} = \frac{Q}{\pi \times 0.25 \times 0.25} = 50.92 Q$$

$$C_{u2,\infty} = U_2 - \frac{C_{m,2}}{\tan \beta_2'} = 20.94 - 88.19 Q$$

$$\mu = (B - C \varphi \cot \beta_2') (1 - \varphi \cot \beta_2')^{-1}$$

به منظور کسب لغزش از رابطه بورمان استفاده می‌کنیم:

$$\frac{r_2}{r_1} = 2, \quad \exp\left(2\pi \frac{\sin \beta_2'}{Z}\right) = \exp\left(2\pi \times \frac{\sin 30^\circ}{7}\right) = 1.57 \xrightarrow{\frac{r_2}{r_1} > 1.57} C = 1$$

$$Z = 7, \beta_2' = 30^\circ \xrightarrow{\text{معادله 9-2}} B = 0.82, \quad \varphi = \frac{C_{m,2}}{U_2} = 2.43 Q$$

$$\mu = 1 - \left[\frac{(1-B)}{1 - \varphi \cot \beta_2'} \right] = 1 - \frac{0.18}{1 - 4.21 Q} = \frac{0.82 - 4.21 Q}{1 - 4.21 Q}$$

$$\Rightarrow H'' = \mu H''_{\infty} = \mu \left(\frac{1}{g} U_2 C_{u2,\infty} \right) = \frac{0.82 - 4.21 Q}{1 - 4.21 Q} (44.70 - 188.25 Q) \quad \text{II}$$

با مقادیر مداران رابطه I, II میزان دی پمپ قابل کسب خواهد بود:

$$\frac{20 + 697.16 Q^2}{0.7 - 140 Q^2 + 10 Q} = \frac{0.82 - 4.21 Q}{1 - 4.21 Q} (44.70 - 188.25 Q)$$

رنگاه معادلات حاصل دارم با معطای طر نامعی $q_1 = 0.2541 \frac{m^3}{s}$, $q_2 = 0.054 \frac{m^3}{s}$ است آنا با معطای طر نامعی $Q = 0.054 \frac{m^3}{s}$ قابل قبول است:

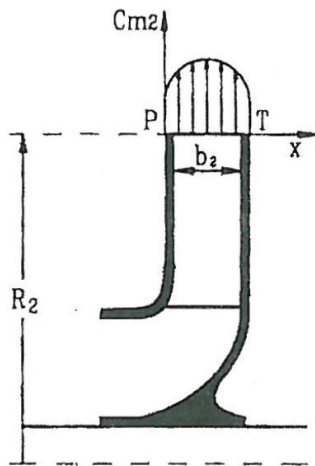
$Q = 0.0540 \frac{m^3}{s}$ رابطه ① $\Rightarrow H'' = 26.49 \text{ m}$, $\eta_H = 0.7 - 140Q^2 + 10Q = 0.83$

$\mu = \frac{0.82 - 4.21Q}{1 - 4.21Q} = 0.767 \Rightarrow C_{u2} = \mu C_{u2,\infty} = 12.41 \frac{m}{s}$, $\eta = 0.9\eta_H = 0.747$

$\beta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{C_{m,2}}{U_2 - C_{u,2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{50.92Q}{20.94 - 12.41}\right) = 17.87^\circ \Rightarrow \delta = \beta'_2 - \beta_2 = 12.13^\circ$

$P = \frac{\rho g Q H}{\eta} = \frac{998 \times 9.81 \times 0.054 \times (H''/\eta_H)}{0.747} = 15.13 \text{ kW}$

(۴) با در نظر گرفتن نمای نصف النهری پمپ سانتریفیوژ و به ازای پروفیل‌های ارائه شده برای سرعت نصف النهری (C_{m2}), ضریب ناهماهنگی (K) و ضریب C_H را محاسبه نموده و بر پایه فرض $U_2 \approx 2C_{u2}$, میزان خطای محاسبه هد اوپلری با فرض پروفیل سرعت یکنواخت را بدست آورید.



(الف) $C_{m2}(x) = \sin \frac{\pi x}{b_2}$

(ب) $C_{m2}(x) = \left(\frac{x}{b_2}\right) - \left(\frac{x}{b_2}\right)^2$

حل مسئله:

④ - در سطرهای سمت چپ، فرمهای تعادلی، انتگرالهای متوسط نصف النهار، رابطه میان آنها را در سطرهای راست بنویسید.

$$\bar{C}_{m,2} = \frac{\int_0^{b_2} C_{m,2}(x) dx}{b_2}, \quad I = \frac{\int_0^{b_2} C_{m,2}^2 dx}{\int_0^{b_2} C_{m,2} dx}, \quad K = \frac{I}{\bar{C}_{m,2}}$$

در سطرهای راست، روابط بالا را برای سطرهای چپ بنویسید:

الف) $C_{m,2} = \sin \frac{\pi x}{b_2}$

$$\int_0^{b_2} C_{m,2} dx = \int_0^{b_2} \sin\left(\frac{\pi x}{b_2}\right) dx = -\frac{b_2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{b_2} \Big|_0^{b_2} = \frac{2b_2}{\pi}$$

$$\int_0^{b_2} C_{m,2}^2 dx = \int_0^{b_2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{b_2}\right) dx = \int_0^{b_2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{b_2}\right)\right) \frac{dx}{2} = \frac{x}{2} \Big|_0^{b_2} - \frac{b_2}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{b_2} \Big|_0^{b_2} = \frac{b_2}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{C}_{m,2} = \frac{\int_0^{b_2} C_{m,2}(x) dx}{b_2} = \frac{2}{\pi}, \quad I = \frac{\frac{b_2}{2}}{\frac{2b_2}{\pi}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow K_{\sin} = \frac{I}{\bar{C}_{m,2}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{"فرم تعادلی در سطرهای چپ"}$$

با توجه به تعریف ضریب C_H حاصل از رابطه:

$$C_H = \frac{\text{هداوت در این بارش بر روی سطح}}{\text{هداوت در این بارش بر روی سطح افقی}} = \frac{H_n''}{H_u''} = (1-K) \frac{U_2}{C_{u,2}} + K \quad \frac{U_2}{C_{u,2}} = 2$$

$$C_{H, \sin} = \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right) \times 2 + \frac{\pi^2}{8} = 0.766 \Rightarrow \frac{\Delta H''}{H_u''} = 1 - C_H = 0.234 = 23.4\%$$

پس در این بارش، هداوت در این بارش بر روی سطح افقی 23.4٪ کمتر از هداوت در این بارش بر روی سطح افقی است.

برای تعیین ضریب $C_{m,2}$ در این بارش، رابطه زیر را داریم:

$$C_{m,2} = \frac{x}{b_2} - \left(\frac{x}{b_2}\right)^2$$

$$\int_0^{b_2} C_{m,2} dx = \int_0^{b_2} \left(\frac{x}{b_2} - \left(\frac{x}{b_2}\right)^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2b_2} - \frac{x^3}{3b_2^2}\right]_0^{b_2} = \frac{b_2}{6}$$

$$\int_0^{b_2} C_{m,2}^2 dx = \int_0^{b_2} \left(\left(\frac{x}{b_2}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{b_2}\right)^3 + \left(\frac{x}{b_2}\right)^4\right) dx = \left[\frac{x^3}{3b_2^2} - \frac{x^4}{2b_2^3} + \frac{x^5}{5b_2^4}\right]_0^{b_2} = \frac{b_2}{30}$$

$$\Rightarrow \bar{C}_{m,2} = \frac{\int_0^{b_2} C_{m,2} dx}{b_2} = \frac{1}{6}, \quad I = \frac{b_2/30}{b_2/6} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow K_{\text{parabolic}} = \frac{I}{\bar{C}_{m,2}} = \frac{1/5}{1/6} = \frac{6}{5} = 1.2$$

"ضریب حاصل از بارش بر روی سطح افقی"

$$C_H = \frac{H_n''}{H_u''} = (1-K) \frac{U_2}{C_{u,2}} + K = (1-1.2) \times 2 + 1.2 = 0.8$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta H''}{H_u''} = 1 - C_H = 0.20 = 20\%$$

پس در این بارش، هداوت در این بارش بر روی سطح افقی 20٪ کمتر از هداوت در این بارش بر روی سطح افقی است.