



(۱) قطر خارجی چرخ یک پمپ سانتریفیوژ 40 cm و عرض خروجی آن 5 cm است. این پمپ در حال کار با سرعت دورانی 800 rpm برای تولید هد 16 m است. اگر زاویه پره در خروجی $\beta_2 = 40^\circ$ باشد، دبی پمپ در این سرعت دورانی را محاسبه نمایید.

حل مسئله:

$\beta_2 = 40^\circ$ "مختصات خروجی"

$U_2 = R_2 \omega = \frac{\pi D_2 N}{60} = \frac{\pi \times 0.4 \times 800}{60} = 16.76 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

ما فرض می‌کنیم سیال درون چرخش دارد و پره‌ها مستقیم هستند ($\alpha_2 = 90^\circ$) پس هر دو برداری برابر است.

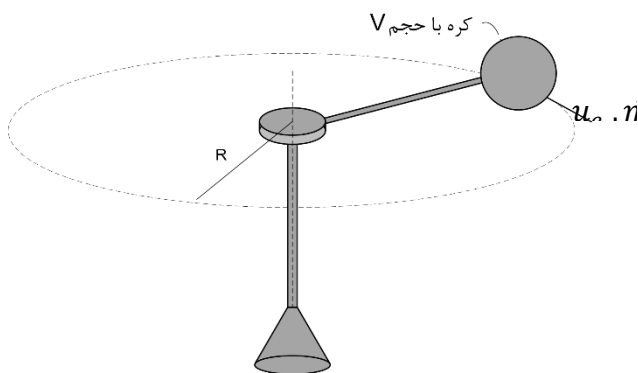
$H'' = \frac{1}{g} \frac{U_2^2}{r} \Rightarrow C_{u,2} = \frac{g H''}{U_2} = \frac{9.81 \times 16}{16.76} = 9.37 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$W_{u,2} = U_2 - C_{u,2} = 16.76 - 9.37 = 7.39 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$C_{m,2} = W_{u,2} \tan \beta_2 = 7.39 \tan 40^\circ = 6.20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow Q = \pi \frac{D_2}{2} b \times C_{m,2} = 0.39 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

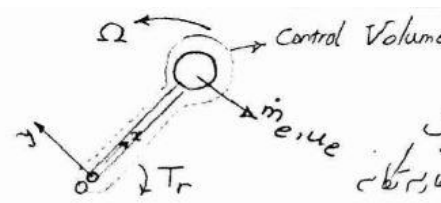
رأس منبسط خروجی:

(۲) سیستم چرخان زیر را در نظر بگیرید. در انتهای بازوی این سیستم، یک مخزن کروی حاوی یک نوع گاز به جرم اولیه M_0 قرار گرفته است. این مخزن دارای یک منفذ است که منجر به تخلیه گاز داخل آن به اتمسفر با دبی جرمی ثابت $\dot{m}_e$ و سرعت ثابت u_e می‌گردد. چنانچه گشتاور مقاوم در برابر حرکت چرخشی متناسب با سرعت مخزن باشد ($T_r = k V_{\text{sphere}}$)، سرعت دورانی سیستم را به صورت تابعی از زمان بدست آورید. (از جرم میله نگهدارنده مخزن صرف نظر نمایید.)



حجم کنترل را به شکل درختی بگیریم:

رنگاه کمات x-y به صورت متغیر به حجم کنترل در نظر گرفته شده و لذا یک سطح ایتری نسبت بین از هم مربوط به رنگاه کمات غیر ایتری می باشد که از این استفاده می شود.



$$\sum \vec{T} - \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{a}_{rel}) dm = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho dV + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (*)$$

که در رابطه بالا، $\vec{a}_{rel}$ شتاب رنگاه کمات غیر ایتری بوده و در حالت کلی به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{a}_{rel} = \frac{d^2 \vec{r}_{rel}(x,y)}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{V}_{rel}}_{\text{مؤلفه کوریولیس}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})}_{\text{مؤلفه کارتری}} = \text{شتاب رنگاه کمات غیر ایتری}$$

در مورد خاص ما در نظر از هم به متغیر کرده به عنوان یک حجم کنترل در نظر گرفته می شود:

$$\vec{r} \times \vec{a}_{rel} = R \hat{e}_r \times \vec{a}_{rel} = R^2 \frac{d\Omega}{dt} \hat{e}_\theta$$

در هم به هم می رود رنگاه کمات انتخاب معادله (*) شکل زیر می شود:

$$-T_r - \int R^2 \frac{d\Omega}{dt} dm = \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{r} \times \vec{V}) \rho dV - R u_e m_e$$

رنگاه x-y به صورت ثابت

$$\Rightarrow M_{sphere} R^2 \frac{d\Omega}{dt} + k R \Omega = R u_e m_e \Rightarrow M_{sphere} R \frac{d\Omega}{dt} = u_e m_e - k \Omega$$

$M_{sphere} = M_0 - m_e t$

$$(M_0 - m_e t) R \frac{d\Omega}{dt} = u_e m_e - k \Omega \Rightarrow R \frac{d\Omega}{dt} = \frac{u_e m_e - k \Omega}{M_0 - m_e t}$$

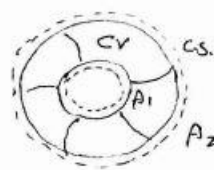
عملیات انتگرال

$$\int_0^\Omega \frac{d\Omega}{B - C\Omega} = \int_0^t \frac{dt}{M_0 - m_e t} \Rightarrow \Omega = \frac{B}{C} \left[1 - \left(1 - \frac{m_e t}{M_0} \right)^{\frac{C}{m_e}} \right], \quad B = \frac{m_e u_e}{R}, \quad C = \frac{k}{R}$$

(۳) به کمک رابطه زیر (تئوری انتقال رینولدز برای مومنوم زاویه ای)، معادله اوایلر برای پمپها را به دست آورید.

$$\vec{R} \times \vec{F}_s + \int_{CV} \vec{R} \times \vec{g} \rho dV + \vec{T}_{shaft} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{R} \times \vec{c} \rho dV + \int_{CS} \vec{R} \times \vec{c} \rho \vec{c} \cdot d\vec{A}$$

نیروی F_s همان نیروهای سطحی دارد برچرخ مثل فشار و کشش است. با توجه به این که نیروهای فشار مثل منع رسایل برچرخ در راستای شعاع میخیزد است و این که در معادله اولی تفاوت اصطکاک نمی داریم میتوان فرض کرد $\vec{R} \times \vec{F}_s = 0$

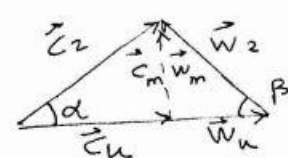


همچنین، با توجه به این که اگر نیروی وزن در مقابل نیروهای دینامیکی ناچیز است که در $\int_{CV} \vec{R} \times \vec{g} \rho dV$ نیز قابل صرف نظر است. از طرف دیگر، پمپ های سانتریفیوژ دارای جریان پایا هستند که ثابت می شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{R} \times \vec{C} \rho dV = 0$$

بنابراین:

$$\vec{T}_{shaft} = \int_{CS} \vec{R} \times \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$



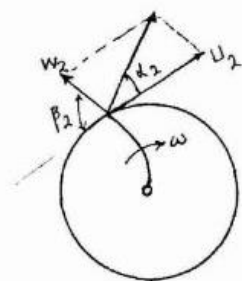
$$\Rightarrow M'' = \int_{CS} R C \cos \alpha (\rho C \cdot dA)$$

$$= \int_{A_2} R_2 C_2 \cos \alpha_2 (\rho C_{m_2} dA_2) - \int_{A_1} R_1 C_1 \cos \alpha_1 (\rho C_{m_1} dA_1)$$

$$\Rightarrow M'' = \dot{m} (R_2 C_2 \cos \alpha_2 - R_1 C_1 \cos \alpha_1)$$

(۴) پمپ سانتریفیوژی با دبی و سرعت دورانی $20 \text{ m}^3/\text{h}$ و 1450 rpm مفروض است. این پمپ دارای چرخ به قطر خارجی 20 cm و ارتفاع پره 1 cm در خروجی چرخ است. چنانچه زاویه پره در خروجی چرخ $\beta_2 = 25^\circ$ و جریان به صورت مماس بر پره ها وارد چرخ شود، مطلوب است محاسبه: هد اویلری، توان، گشتاور و زاویه خروج سیال از چرخ (α_2).

حل مسئله:



با توجه به آنکه جریان به صورت عمادی در بر می خورده و در آن شیب $\alpha_1 = 90^\circ$

$$C_{m,2} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2} = \frac{20 \frac{m^3}{h} \times \frac{h}{3600 s}}{\pi \times 0.2 \times 0.01} = 0.88 \frac{m}{s}$$

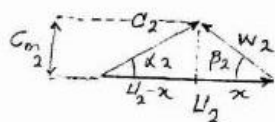
$$U_2 = R_2 \omega = 0.1 \times 1450 \times \frac{2\pi}{60} = 15.18 \frac{m}{s}$$

به منظور تعیین α_2 از مثلث سرعت در فرضی استفاده می شود:

$$\tan \beta_2 = \frac{C_{m,2}}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{C_{m,2}}{\tan \beta_2} = 1.89 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow C_{u,2} = U_2 - \alpha = 15.18 - 1.88 = 13.29 \frac{m}{s}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{C_{m,2}}{C_{u,2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.88}{13.29} \right) = 3.79^\circ$$



$$H'' = \frac{1}{g} (U_2 C_{u,2} \cos \alpha_2 - U_1 C_{u,1} \cos \alpha_1) = \frac{1}{g} U_2 C_{u,2} = 20.56 \text{ m}$$

$$E'' = U_2 C_{u,2} \cos \alpha_2 - U_1 C_{u,1} \cos \alpha_1 = U_2 C_{u,2} = 201.74 \frac{J}{kg}$$

$$P'' = m U_2 C_{u,2} \cos \alpha_2 = \rho Q U_2 C_{u,2} = 1120.80 \text{ W}$$

$$M'' = m (R_2 C_{u,2} \cos \alpha_2 - R_1 C_{u,1} \cos \alpha_1) = \rho Q R_2 C_{u,2} = 7.40 \text{ N.m}$$

چگالی سیال: $1000 \frac{kg}{m^3}$
در نظر گرفته شده است.