

به نام خدا

تمرین سری ۳ دینامیک سیالات محاسباتی

موعد تحویل: ۱۴۰۳/۰۳/۱۸

مسئله ۱. معادله پواسون $\nabla^2 = f(x, y)$ را در نظر بگیرید.

الف) معادله را از دستگاه کارتزین به دستگاه مختصات خمیده خطی^۱ انتقال دهید. بدین منظور فرض نمایید که متغیرهای مستقل در مختصات جدید (ξ, η) باشد. با استفاده از مشتق گیری زنجیری، روابط میانی مشتقات مرتبه اول و دوم نسبت به (x, y) با مشتقات مرتبه اول و دوم نسبت به (ξ, η) و بالعکس ایجاد کنید. سپس این روابط را در معادله پواسون جایگذاری نمایید.

ب) نتیجه حاصل برای معادله پواسون در دستگاه مختصات عمومی را با استفاده از فرم معادله پواسون در دستگاه مختصات قطبی صحت سنجی نمایید. $(\xi = r, \eta = \theta)$ را در نظر گرفته و از ارتباط بین متغیرهای مستقل در دو دستگاه مختصات کارتزین و قطبی برای محاسبه مشتقات حاضر در فرم کلی معادله پواسون استفاده نمایید.

پ) بر مبنای تکنیک مرکزی مرتبه ۲، شکل گسسته معادلات را بدست آورده و روش گاوس-سایدل نقطه‌ای را بر آن اعمال نمایید. توجه نمایید که معادله پواسون کلی باید تماماً نسبت به متغیرهای (ξ, η) گسسته‌سازی شود.

مسئله ۲. مسئله انتقال حرارت یک بعدی پایا در یک فین با سطح مقطع ثابت و طول L در نظر بگیرید. معادله حاکم به صورت

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \lambda(T_a - T) = 0$$

قابل بیان است که در آن، $T(C)$ دما، $x(m)$ فاصله از دیواره در راستای طولی فین، $T_a(C)$ دمای جریان سیال اطراف و برابر ۵ سانتی‌گراد بوده و $\lambda(m^{-2})$ ثابت حرارتی فین است و برابر $0.04m^{-2}$ می‌باشد. $L = 20m$ و دمای دو سر فین در مقادیر ثابت $T = 25$ و $T_L = 100$ ثبت شده است.

الف) پاسخ تحلیلی معادله را بدست آورید.

ب) معادله مذکور را بر مبنای روش حجم محدود و با دقت مکانی مرتبه ۲، ضمن استفاده از سلول مجازی در ابتدا و انتهای ناحیه محاسباتی برای اعمال شرایط مرزی، گسسته‌سازی نمایید.

^۱ Curvilinear Coordinates

پ) با تقسیم ناحیه محاسباتی به ۲۰ سلول، توزیع دما را با استفاده از روش حل دستگاه معادلات جبری بدست آورید. حل معادله را برای حالات ۴۰ و ۸۰ و ۱۶۰ سلول محاسباتی تکرار نمایید. در نقطه میانی دامنه $(x = \frac{L}{2})$ خطای حل عددی در هر تقسیم‌بندی برای دامنه محاسباتی را از طریق مقایسه با پاسخ تحلیلی محاسبه نمایید. مرتبه‌ی دقت حل عددی را با استفاده از خطاهای محاسبه شده، بدست آورید.

ت) با در نظر گرفتن شرط همگرایی به صورت $L_2 - Norm \leq 10^{-12}$ و حدس اولیه مناسب، معادلات گسسته‌سازی شده را با استفاده از روش‌های ژاکوبی^۲ و گاوس-سایدل^۳ حل نموده و تعداد تکرارها را در هر روش گزارش نمایید.

ث) مرحله‌ی قبلی را با استفاده از روش SOR ^۴ و با مقادیر مختلفی از ضریب ω تکرار نمایید. حداکثر مقدار ضریب ω را که به ازای آن همگرایی روش مختل نمی‌شود، بدست آورید.

مسئله ۳. معادله همرفت-پخش^۵ زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

که توصیف انتشار موج در یک کانال یک‌بعدی است. در این معادله $a = 2.5 m/s$ و $\alpha = 0.005 m^2/s$ و $final$ و $time = 0.2s$ و $0 \leq x \leq 1m$ می‌باشد.

شرایط اولیه به صورت زیر است:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1.0 & \text{if } x < 0.2 \\ 0.5 & \text{if } x = 0.2 \\ 0.0 & \text{if } x > 0.2 \end{cases}$$

و شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$u(0, t) = 1.0 \frac{m}{s} \quad u(1, t) = 0$$

راه حل تحلیلی به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x, t) = 1 - 0.5 \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_0 - at}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right] \quad x_0 = 0.2 m$$

^۲ Jacobi method

^۳ Gauss-Seidel method

^۴ Successive over-relaxation

^۵ Convection-diffusion

با استفاده از روش‌های زیر مسئله را حل کنید:

۱. حجم محدود: $FTCS^6$ هم برای همرفت هم برای پخش

۲. حجم محدود: گسسته‌سازی بادسو مرتبه اول برای همرفت و $FTCS$ برای پخش

۳. تفاضل محدود: $FTCS$ هم برای همرفت هم برای پخش

۴. تفاضل محدود: گسسته‌سازی بادسو مرتبه اول برای همرفت و $FTCS$ برای پخش

۵. تفاضل محدود: لکس-وندرووف^۷ برای همرفت و $FTCS$ برای پخش

الف) مقایسه‌ی حل از روش‌های مختلف در زمان‌های متفاوت.

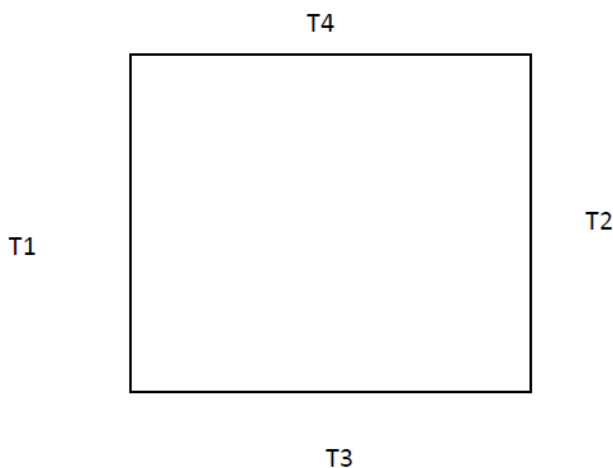
ب) حداقل برای یک روش‌ها با افزایش دقت (کاهش $\Delta t, \Delta x$) میزان صحت را بسنجید.

پ) کدام روش دقیقتر است؟

راهنما: با بررسی شرایط پایداری، خطای برشی و معادله گسسته‌سازی شده هر روش نحوه عملکرد آنها را به ازای

Δt و Δx مختلف بررسی کنید.

مسئله ۴. شکل ۱ را در نظر بگیرید:



شکل ۱. ناحیه محاسباتی و شرایط مرزی دمایی

^۶ Forward time-centered space

^۷ Lax-Wendroff

هدف این مسئله یافتن توزیع دما در شکل بالا است که در حالت هدایت پایا قرار دارد. معادلات گسسته‌سازی شده به ۳ روش زیر باید حل شوند:

الف) گاوس-سایدل نقطه‌ای

ب) SOR

ج) گاوس-سایدل خطی

- زمان نیاز جهت حل به ۳ روش مختلف را با یکدیگر مقایسه کنید.
- کانتور دما را برای حالت‌های مرزی دیریشله مختلف رسم کنید.
- ضریب $over-relaxation$ و ارتباط آنرا با زمان همگرایی بررسی کنید و نموداری برای آن رسم نمایید.

شرایط مرزی به شرح زیر است:

۱. $(T_1=300, T_2=100, T_3=400, T_4=200)$

۲. $(T_1=300, T_2=100, T_3=200, T_4=400)$

۳. $(T_1=100, T_2=300, T_3=400, T_4=200)$

۴. $(T_1=100, T_2=300, T_3=200, T_4=400)$

۵. $(T_1=300, T_2=300, T_3=400, T_4=200)$

۶. $(T_1=300, T_2=100, T_3=400, T_4=400)$

نکات مهم:

- پیاده‌سازی روشهای عددی و حل معادلات در $MATLAB$ انجام بگیرد و تا حد امکان رویکرد تابع‌نویسی را در پیاده‌سازی الگوریتم‌های عددی پیش بگیرید.

- استفاده از توابع $MATLAB$ برای حل دستگاه معادلات جبری قابل قبول نبوده و الگوریتم حل مدنظر باید پیاده‌سازی گردد.

- کدهای تکراری با مشابهت بالا نمره تعلق نمیگیرد.