



مسئله ۱. معادله پواسون $\nabla^2 u = f(x, y)$ را در نظر بگیرید.

۱- الف) معادله را از دستگاه مختصات کارتزین به دستگاه مختصات خمیده خطی^۱ انتقال دهید. بدین منظور فرض نمایید که متغیرهای مستقل در مختصات جدید (ξ, η) باشد. با استفاده از مشتق‌گیری زنجیری، روابطی میان مشتقات مرتبه اول و دوم نسبت به (x, y) با مشتقات مرتبه اول و دوم نسبت به (ξ, η) و بالعکس ایجاد نمایید. سپس این روابط را در معادله پواسون جایگذاری نمایید.

۲- ب) نتیجه حاصل برای معادله پواسون در دستگاه مختصات عمومی را با استفاده از فرم معادله پواسون در دستگاه مختصات قطبی صحت‌سنجی نمایید. $(\xi = r, \eta = \theta)$ را در نظر گرفته و از ارتباط بین متغیرهای مستقل در دو دستگاه مختصات کارتزین و قطبی برای محاسبه مشتقات حاضر در فرم کلی معادله پواسون استفاده نمایید.

۳- پ) بر مبنای تکنیک مرکزی مرتبه ۲، شکل گسسته معادلات را بدست آورده و روش گاوس-سایدل نقطه‌ای را بر آن اعمال نمایید. توجه نمایید که معادله پواسون کلی باید تماماً نسبت به متغیرهای (ξ, η) گسسته‌سازی شود.

مسئله ۲. به منظور محاسبه‌ی توزیع غلظت یک ماده‌ی مشخص در راستای طولی یک راکتور شیمیایی، می‌توان از معادله‌ی جابجایی-پخش یک بعدی به صورت

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - U \frac{\partial C}{\partial x} - kC$$

استفاده نمود که در آن C غلظت (mg/m^3) ، ε ضریب پخش (m^2/s) ، U سرعت متوسط جریان (m/s) و k نرخ واکنش شیمیایی مربوط به واپاشی ماده موردنظر است. همچنین x مولفه‌ی در راستای طولی راکتور به صورت $0 \leq x \leq L$ است که در آن L به طول راکتور اشاره دارد. با فرض آن که برای مسئله مورد مطالعه $\varepsilon = 1.7 \text{ m}^2/\text{s}$ ، $U = 0.02 \text{ m}/\text{s}$ ، $k = 0.0025 \text{ s}^{-1}$ ، $L = 10 \text{ m}$ باشد، در بازه زمانی $t = [0, 6000] \text{ s}$ و تحت فرض‌های:

- توزیع اولیه غلظت در طول راکتور: $C(x, 0) = 0$.

- بالانس شار غلظت در مرز ورودی $(x = 0)$ که می‌توان آن را به صورت $UC_{in} = UC(0, t) - \varepsilon \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{(0, t)}$ نمایش

داد. در این رابطه، $C_{in}(0, t) = 100 \text{ mg}/\text{m}^3$ در نظر گرفته شود.

- عدم وجود شار پخشی در مرز خروجی $(x = L)$: $\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$

مطلوب است:

¹Curvilinear coordinates



۲- الف) با اعمال گسسته‌سازی مکانی مرکزی مرتبه ۲ و گسسته‌سازی زمانی پیشرو مرتبه ۱، یک روش حجم محدود صریح برای حل عددی این معادله توسعه دهید.

۲- ب) با استفاده از آنالیز فون نیومن، محدوده‌ی پایداری این روش گسسته‌سازی را در حالت عمومی بدست آورید. در ادامه، نشان دهید چنانچه اثر پخش بر اثر جابجایی غلبه نماید (به بیان دیگر عدد پکلت سلول محاسباتی کمتر از ۲ باشد یا $\Delta x \leq 2\varepsilon/U$)، شرط پایداری این روش به صورت

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2\varepsilon + k(\Delta x)^2}$$

قابل بیان است.

۲- پ) با استفاده از تعداد ۵۰ سلول محاسباتی، پاسخ توزیع غلظت را در بازه‌ی موردنظر بدست آورده و نمودار آن را برای پنج زمان مختلف در بازه‌ی زمانی مورد مطالعه ارائه کنید. همچنین، نمودار غلظت نقطه‌ی میانی ناحیه مورد مطالعه بر حسب زمان را رسم کنید. آیا در بازه مورد مطالعه، رفتار پایا ایجاد می‌شود؟

۲- ت) بخش قبل را برای تعداد ۲۰۰ سلول محاسباتی تکرار نمایید. به صورت عددی درستی رابطه‌ی حاصل برای محدوده‌ی پایداری را بررسی نمایید. نتایج حاصل از این مرحله را با نتایج حاصل از مرحله‌ی قبلی برای غلظت نقطه‌ی میانی مقایسه نمایید.

۲- ث) حل معادله را به ازای $\varepsilon = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ تکرار و نتایج را گزارش نمایید.

۲- ج) حل معادله را به ازای $k = 0.01 \text{ s}^{-1}$ تکرار و نتایج را گزارش نمایید.

مسئله ۳. هدف این مسئله، بکارگیری روش‌های ضمنی برای حل معادله ارائه شده در مسئله قبلی است. در این راستا:

۳- الف) با اعمال گسسته‌سازی مکانی مرکزی مرتبه ۲ و گسسته‌سازی زمانی پیشرو مرتبه ۱، یک روش حجم محدود ضمنی برای حل معادله مذکور توسعه دهید.

۳- ب) روش کرنک-نیکلسون را برای حل معادله مذکور پیاده‌سازی نمایید.

۳- پ) با استفاده از ۲۰۰ سلول محاسباتی، پاسخ توزیع غلظت در بازه‌ی مورد مطالعه را با استفاده از هر دو روش ضمنی بدست آورده و نتایج را برای پنج زمان مختلف مقایسه نمایید. نمودار تغییرات زمانی غلظت در نقطه‌ی میانی دامنه محاسباتی را نیز برای دو روش مقایسه کنید. گام زمانی حداکثری در روش‌های ضمنی را با روش صریح مقایسه کنید.

*تذکر: توجه داشته باشید که در این حالت، ضروری است تا در هر گام زمانی یک دستگاه معادلات حل گردد. پس اعمال شرایط مرزی را به گونه‌ای انجام دهید که دستگاه معادلات، طبق الگوریتم توماس قابل حل باشد. توصیه می‌شود که در متلب تابعی توسعه دهید که الگوریتم توماس را بر یک دستگاه معادلات اعمال نموده و حل را خروجی دهد.



مسئله ۴. مسئله انتقال حرارت یک بعدی پایا در یک فین با سطح مقطع ثابت و طول L را در نظر بگیرید. معادله حاکم به صورت

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \lambda(T_a - T) = 0$$

قابل بیان است که در آن، T (°C) دما، x (m) فاصله از دیواره در راستای طولی فین، T_a (°C) دمای جریان سیال اطراف و λ (m⁻²) ثابت حرارتی فین هستند. با فرض اینکه، $T_a = 5^\circ\text{C}$ ، $\lambda = 0.04\text{ m}^{-2}$ ، $L = 20\text{ m}$ و دمای دو سر فین در مقایر $T_0 = 25^\circ\text{C}$ و $T_L = 100^\circ\text{C}$ ثابت شده باشد:

۴-الف) پاسخ تحلیلی معادله را بدست آورید.

۴-ب) معادله مذکور را بر مبنای روش حجم محدود و با دقت مکانی مرتبه ۲، ضمن استفاده از سلول مجازی در ابتدا و انتهای ناحیه محاسباتی برای اعمال شرایط مرزی، گسسته سازی نمایید.

۴-پ) با تقسیم ناحیه محاسباتی به ۲۰ سلول، توزیع دما را با استفاده از روش حل دستگاه معادلات جبری بدست آورید. حل معادله را برای حالات ۴۰، ۸۰ و ۱۶۰ سلول محاسباتی تکرار نمایید. در نقطه میانی دامنه ($x = L/2$)، خطای حل عددی در هر تقسیم بندی برای دامنه محاسباتی را از طریق مقایسه با پاسخ تحلیلی محاسبه نمایید. مرتبه دقت حل عددی را با استفاده از خطاهای محاسبه شده، بدست آورید.

۴-ت) با در نظر گرفتن شرط همگرایی به صورت $L_2 - \text{Norm} \leq 10^{-12}$ و حدس اولیه مناسب، معادلات گسسته سازی شده را با استفاده از روش های ژاکوبی و گاوس-سایدل حل نموده و تعداد تکرارها را در هر روش گزارش نمایید.

۴-ث) مرحله قبلی را با استفاده از روش SOR و با مقادیر مختلفی از ضریب ω تکرار نمایید. حداکثر مقدار ضریب ω را که به ازای آن همگرایی روش مختل نمی شود، بدست آورید.

در مورد این سری تمرین، به موارد زیر توجه نمایید:

۱. پیاده سازی روش های عددی و حل معادلات به زبان MATLAB صورت خواهد گرفت. تا حد امکان رویکرد تابع نویسی را در پیاده سازی الگوریتم های عددی در پیش گیرید.

۳. استفاده از توابع MATLAB برای حل دستگاه معادلات جبری قابل قبول نبوده و الگوریتم حل مدنظر باید پیاده سازی گردد.

۲. کدهای توسعه یافته باید خوانا و منحصر به فرد باشند.

۴. به کدهای تکراری یا با مشابهت بالا، نمره ای تعلق نخواهد گرفت.