

به نام خدا

تمرین سری دوم درس دینامیک سیالات محاسباتی

موعد تحویل: ۴ خرداد ۱۴۰۳

مسئله ۱. معادله پخش زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

الف) معادله‌ی کرنک نیکلسون ضمنی را بنویسید.

ب) با استفاده از آنالیز فون نیومن، پایداری را بررسی کنید.

مسئله ۲. یک روش گسسته‌سازی برای معادله رسانش حرارت تک‌بعدی با ضریب پخش ثابت α به صورت زیر مد نظر است.

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (\phi_{j+1}^n - \phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1} + \phi_{j-1}^n)$$

با استفاده از آنالیز فوریه (فون نیومن) پایداری این روش گسسته‌سازی را بررسی کنید.

مسئله ۳. گسسته‌سازی معادله موج یک بعدی آورده شده.

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{c}{2\Delta x} (\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n) = 0$$

با استفاده از آنالیز فون نیومن، پایداری این روش گسسته‌سازی را بررسی کنید.

مسئله ۴. معادله پخش حرارتی یک بعدی با مقادیر ثابت برای ضریب پخش (α) و ضریب چشمه (k) مفروض است.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + kT$$

با اعمال گسسته‌سازی پیشرو در زمان و مرکزی نسبت به مکان، شکل تفاضل محدود معادله مذکور را بدست آورده و پایداری روش حاصل را بررسی کنید. ضریب بزرگنمایی^۱ را بر حسب یک مقدار مشخص ضریب چشمه (k) رسم نمایید.

مسئله ۵. نشان دهید که با استفاده از روش صریح FTCS برای معادله زیر:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x}$$

الف) لزجت مصنوعی $\alpha_e = \frac{-a^2 \Delta t}{2}$ را ایجاد می‌کند.

ب) مقدار لزجت ساختگی برابر با ضریب $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در عبارت خطا می‌باشد.

مسئله 6. برای معادله $\phi_t = \alpha \phi_{xx}$ رابطه تفاضل محدود در گسسته‌سازی با استفاده از روش θ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = \alpha \left[\theta \left(\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \right]$$

الف) شرایط گسسته‌سازی رابطه بالا را به ازای مقادیر مختلف θ ($0 \leq \theta \leq 1$) بررسی کنید.

ب) به ازای $\theta = \frac{1}{2}$ این روش به رویکرد کرنک نیکلسون تبدیل می‌شود. نشان دهید خطای برشی گسسته‌سازی در این حالت از مرتبه $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ می‌باشد.

پ) به ازای چه مقدار θ خطای برشی این روش از مرتبه $O(\Delta x^4, \Delta t^2)$ می‌باشد؟

^۱ Amplification Factor