



مسئله ۱. برای معادله $\phi_t = \alpha \phi_{xx}$ ، رابطه تفاضل محدود در گسسته‌سازی با استفاده از روش θ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = \alpha \left[\theta \left(\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \right]$$

(الف) شرایط سازگاری رابطه بالا را به ازای مقادیر مختلف θ ($0 \leq \theta \leq 1$) بررسی کنید.

(ب) به ازای $\theta = \frac{1}{2}$ این روش به رویکرد کرنک نیکلسون تبدیل می‌شود. نشان دهید خطای برشی گسسته‌سازی در این حالت از مرتبه $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ می‌باشد.

(پ) به ازای چه مقدار θ خطای برشی این روش از مرتبه $O(\Delta x^4, \Delta t^2)$ خواهد بود؟

مسئله ۲. یک روش گسسته‌سازی برای معادله رسانش حرارتی تک‌بعدی با ضریب پخش ثابت α به صورت

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (\phi_{j+1}^n - \phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1} + \phi_{j-1}^n)$$

مدنظر است. با استفاده از آنالیز فوریه (فون نیومن)، پایداری این روش گسسته‌سازی را بررسی نمایید.

مسئله ۳. گسسته‌سازی معادله موج یک‌بعدی به صورت

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{c}{2\Delta x} (\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n) = 0$$

انجام شده است. با استفاده از آنالیز فون نیومن، پایداری این روش گسسته‌سازی را بررسی نمایید.

مسئله ۴. معادله پخش حرارتی تک‌بعدی با مقادیر ثابت برای ضریب پخش (α) و ضریب چشمه (k).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + ku$$

مفروض است. با اعمال گسسته‌سازی پیشرو در زمان و مرکزی نسبت به مکان، شکل تفاضل محدود معادله مذکور را بدست آورده و پایداری روش حاصل را بررسی نمایید. ضریب بزرگنمایی (amplification factor) را بر حسب یک مقدار مشخص ضریب چشمه (k) رسم نمایید.