



موعد تحویل: ۲۰ فروردین ۱۴۰۳

مسئله ۱: معادله $a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} = -(d\phi_x + e\phi_y + f\phi - g)$ را در نظر بگیرید. با توجه به این موضوع که مشتقات جزئی مرتبه دو بر روی منحنی مشخصه‌های این معادله ناپیوسته بوده یا منحصر به فرد نیستند، نشان دهید که منحنی مربوطه از رابطه‌ی زیر پیروی می‌نماید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

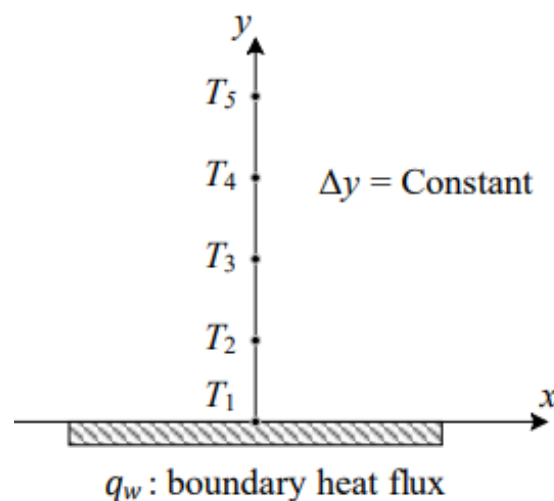
مسئله ۲: یک فرمول تقریبی تفاضل پسرو را برای $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ که از مرتبه (Δx) است، با توجه به نقاط شبکه با فاصله مساوی $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i$ با استفاده از روش‌های زیر ارائه دهید:

(الف) بسط‌های سری تیلور.

(ب) فرمول تفاضل پسرو.

(ج) چند جمله‌ای درجه سوم که از چهار نقطه عبور می‌کند.

مسئله ۳: فرض نمایید که حل تفاضل محدود توزیع دما در یک ناحیه به جز بر روی دیواره‌ای با شرط مرزی شار حرارتی مشخص $q_w = -K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$ در دسترس است. چنانچه دما بر روی دیواره (T_1) مطلوب باشد، تحت هر یک از فرض‌های زیر برای توزیع دما در همسایگی، دیواره رابطه‌ای برای T_1 بر حسب مقادیر معلوم گره‌های همسایه $(T_2, T_3, \dots)$ ارائه نمایید:



(الف) توزیع خطی دما،

ب توزیع چندجمله ای مرتبه ی دو،

پ) توزیع چند جمله ای مرتبه ی سه.

برای هر تقریب ارائه شده مرتبه ی خطای برشی را نیز گزارش نمایید.

مساله ۴: همانطور که می دانید با دخیل نمودن تعداد نقاط بیشتری از همسایگی گره هدف میتوان دقت روابط تفاضل محدود را افزایش داد اگرچه این شیوه به علت آنکه معمولاً منجر به پیچیدگی حل دستگاه معادلات در فرایند حل می شود، چندان مطلوب به نظر نمی رسد. یکی از روش های جایگزین در این زمینه بهره گیری از تکنیک تفاضل محدود فشرده است که با ادغام پاسخ و مشتق های مرتبه اول آن در قالب یک رابطه تلاش می کند تا دقت تقریب مشتقات را با استفاده از تعداد گره های کمتری بهبود دهد. رابطه ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\beta \phi'_{i-1} + \phi'_i + \lambda \phi'_{i+1} = a\phi_{i-1} + b\phi_i + c\phi_{i+1}$$

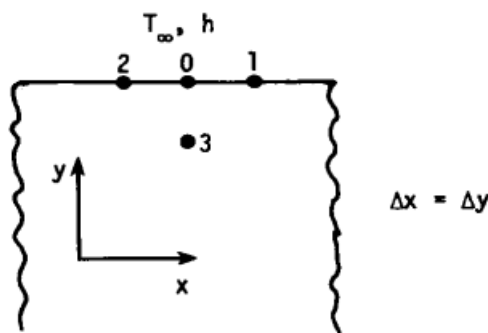
ضرایب a, b, c, β, λ و مرتبه دقت را برای ϕ'_i محاسبه نمایید همچنین تعداد گره های لازم را برای تقریب های تفاضل مرکزی و پیشرو که مرتبه دقت یکسان با رابطه ی بالا برای مشتق مرتبه اول نتیجه می دهند، بدست آورید.

مساله ۵: یک مسئله رسانایی حالت پایدار را در نظر بگیرید که توسط معادله لاپلاس با شرایط مرزی همرفتی مدل می شود (شکل را ببینید). شرط مرزی را به راحتی می توان به شکل تفاضل محدود تبدیل کرد.

$$(-k \frac{dT}{dy})_{bdy} = h(T_w - T_\infty) \quad \text{شرط مرزی:}$$

$$\left(-k \left[\frac{(T_0 - T_\infty)}{\Delta y} \right] \right) + O(\Delta y) = h(T_0 - T_\infty)$$

از رویکرد حجم کنترل برای ایجاد یک عبارت برای شرایط مرزی در نقطه ۰ استفاده کنید. خطای برشی را ارزیابی کنید. با فرض اینکه معادله لاپلاس در نقطه مرزی اعمال شود.



مساله ۶: در روش حجم محدود، مقدار تابع جواب در مرز شرقی سلول شماره i را بر حسب مقادیر میانگین سلول های $i+1, i, i-1$ ، به صورت $\phi_e = a \bar{\phi}_{i-1} + b \bar{\phi}_i + c \bar{\phi}_{i+1}$ بدست آورده و مرتبه دقت را محاسبه نمایید. در ادامه، این رابطه و

مرتبه دقت آن را بر حسب مقادیر نقطه‌ای به شکل $\Phi_e = a \bar{\Phi}_{i-1} + b \bar{\Phi}_i + c \bar{\Phi}_{i+1}$ نیز استخراج نمایید. روابط حاصل را با یکدیگر مقایسه نمایید.

مساله ۷: عبارت $\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ را می توان با کمک گسسته‌سازی سه سطحی نوشت.

$$\frac{0.5 T_j^{n-1} - 2 T_j^n + 1.5 T_j^{n+1}}{\Delta t} - \alpha \left[\frac{(1+d)(T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1})^n}{\Delta x^2} - \frac{d(T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1})^{n-1}}{\Delta x^2} \right] = 0$$

(الف) هر عبارت را به عنوان یک سری تیلور بسط دهید تا خطای برش معادله کامل برای مقادیر دلخواه d تعیین شود.

(ب) d را طوری انتخاب نمایید تا دقت Δx از مرتبه ۴ باشد.