



مسئله ۱) معادله $a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} = -(d\phi_x + e\phi_y + f\phi - g)$ را در نظر بگیرید. با توجه به این موضوع که مشتقات جزئی مرتبه دو بر روی منحنی مشخصه‌های این معادله ناپیوسته بوده یا منحصر به فرد نیستند، نشان دهید که منحنی مربوطه از رابطه‌ی:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

پیروی می‌نماید.

مسئله ۲) تقریب تفاضل محدود را برای مشتق مرتبه سوم تابع ϕ به صورت زیر استخراج کرده و جمله غالب خطای برشی (Leading order term) را تعیین نمایید.

$$\left. \frac{d^3 \phi}{dx^3} \right|_i = FD(\phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}, \phi_{i+3}) + O(\Delta x)$$

مسئله ۳) فرض نمایید که حل تفاضل محدود توزیع دما در یک ناحیه به جز بر روی دیواره‌ای با شرط مرزی شار حرارتی

مشخص $q_w = -K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$ ، در دسترس است. چنانچه دما بر

روی دیواره (T_1) مطلوب باشد، تحت هر یک از فرض‌های زیر برای

توزیع دما در همسایگی دیواره، رابطه‌ای برای T_1 بر حسب مقادیر معلوم

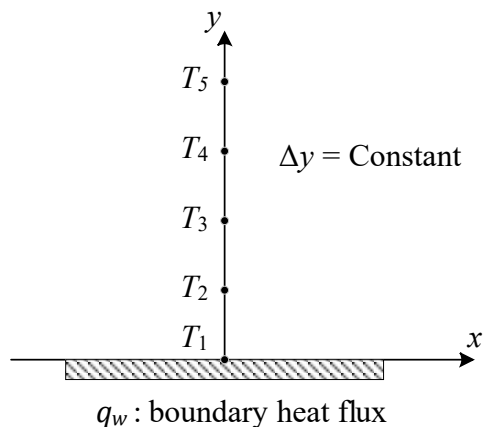
گره‌های همسایه ($T_2, T_3, \dots$) ارائه نمایید:

الف) توزیع خطی دما،

ب) توزیع چندجمله‌ای مرتبه‌ی دو،

پ) توزیع چندجمله‌ای مرتبه‌ی سه.

برای هر تقریب ارائه شده مرتبه‌ی خطای برشی را نیز گزارش نمایید.



مسئله ۴) همانطور که می‌دانید با دخیل نمودن تعداد نقاط بیشتری از همسایگی گره هدف، می‌توان دقت روابط تفاضل محدود را افزایش داد. اگرچه این شیوه به علت آن‌که معمولاً منجر به پیچیدگی حل دستگاه معادلات در فرایند حل میشود، چندان مطلوب به نظر نمی‌رسد. یکی از روش‌های جایگزین در این زمینه بهره‌گیری از تکنیک تفاضل محدود

فشرده^۱ است که با ادغام پاسخ و مشتق‌های مرتبه اول آن در قالب یک رابطه، تلاش می‌کند تا دقت تقریب مشتقات را با استفاده از تعداد گره‌های کمتری بهبود دهد. رابطه‌ی

$$\beta \phi'_{i-1} + \phi'_i + \lambda \phi'_{i+1} = a \phi_{i-1} + b \phi_i + c \phi_{i+1}$$

را در نظر بگیرید. ضرایب β, λ, a, b, c و مرتبه دقت را برای ϕ'_i محاسبه نمایید. همچنین تعداد گره‌های لازم را برای تقریب‌های تفاضل مرکزی و پیشرو که مرتبه دقت یکسان با رابطه‌ی بالا برای مشتق مرتبه اول نتیجه می‌دهند، بدست آورید.

مسئله ۵) فرض نمایید که یک تقریب با مرتبه دقت ۲ برای شار پخشی ($d\phi/dx$) بر روی مرز شرقی و بر مبنای مقادیر متوسط سلول‌های بالادستی، به صورت

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = a \bar{\phi}_i + b \bar{\phi}_{i-1} + c \bar{\phi}_{i-2} + \dots$$

مطلوب باشد. تعداد مقادیر متوسط حجم کنترلی و ضرایب مربوطه در این رابطه را بدست آورید.

مسئله ۶) در روش حجم محدود، مقدار تابع جواب در مرز شرقی سلول شماره i را بر حسب مقادیر میانگین سلول‌های $i-1$ و $i+1$ به صورت

$$\phi_e = a \bar{\phi}_{i-1} + b \bar{\phi}_i + c \bar{\phi}_{i+1}$$

بدست آورده و مرتبه دقت را محاسبه نمایید. در ادامه، این رابطه و مرتبه دقت آن را بر حسب مقادیر نقطه‌ای به شکل

$$\phi_e = a \bar{\phi}_{i-1} + b \bar{\phi}_i + c \bar{\phi}_{i+1}$$

نیز استخراج نمایید. روابط حاصل را با یکدیگر مقایسه نمایید.

¹ Compact finite difference scheme